Übungsblatt 2

Analysis II

R. Wallisser / Th. Nopper

Aufgabe 5: Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar und es gelte $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$. Es sei

$$M_{f,g} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ f(x) \geq y \geq g(x)\}.$$

Der Flächeninhalt $I(M_{f,g})$ werde definiert durch $I(M_{f,g}) := \int_a^b (f(x)-g(x))\, dx$. Man berechne $I(M_{f,g})$ für

1. $f(x) := \frac{x^2}{2} + 2,\ g(x) := x^2$
2. $f(x) := 1 - x^2,\ g(x) := x^2$.

Aufgabe 6:

1. Lösen Sie das Anfangswertproblem

   $$f'(x) - 2f(x) = 5, \quad f(0) = \frac{1}{2}.$$

   Anleitung: Lösen Sie zunächst die homogene Gleichung und dann durch Variation der Konstanten die inhomogene Gleichung.

2. Stellen Sie die Taylorformel um $x_0 = 0$ mit dem Restglied 2-ter Ordnung von $\arctan x$ auf.
   Anleitung: Geben Sie zunächst das Taylorpolynom 2-ter Ordnung an. Geben Sie dann R_2 in der Form von Lagrange an (Vorsicht: in den Büchern wird unser R_2, welches zum Taylorpolynom T_2 gehört, oft mit R_3 bezeichnet!). Wir haben geschrieben: $f = T_2 + R_2$.

Aufgabe 7:

1. Sei $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$. Ist f in $(0,1]$ stetig? Wenn ja, ist f im Definitionsgebiet gleichmäßig stetig?
2. Es sei $a > 0$ und $I = [a, \infty)$. Sind die Funktionen $\frac{1}{x}$ bzw. $\log x$ in I gleichmäßig stetig?

Aufgabe 8:

1. Es seien $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. Man zeige: $f \cdot g \in \mathcal{R}[a,b]$.
2. Sei $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Es gebe ein $C > 0$, so daß $|f(x)| \geq C$ gelte für alle $x \in [a,b]$. Man zeige: $\frac{1}{f} \in \mathcal{R}[a,b]$.
3. Zeigen Sie, daß

   $$f(x) := \frac{x^4}{x^2 - 2x + 2}$$

   über jedem Intervall $[a,b]$ integrierbar ist.

Abgabetermin: Donnerstag, 10. Mai vor der Vorlesung. Bitte geben Sie stets die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.