Übungsblatt 4

Analysis II

R. Wallisser / Th. Nopper

Aufgabe 13: Beweisen Sie die binomische Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

durch Anwendung der Taylorformel mit Integralrestglied auf die Funktion $f(x) := x^n$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = a$. Werten Sie die entstehende Identität an der Stelle $x = a + b$ aus.

Aufgabe 14:

1. Berechnen Sie $\sqrt{e}$ auf drei Stellen hinter dem Komma exakt. Verwenden Sie hierzu die Taylorentwicklung von $\exp(x)$ um Null und das Restglied von Lagrange. Beachten Sie beim Rechnen die möglichen Rundungsfehler.

2. Es sei $f \in C^{(2)}[1,2]$, $f(1) = 4$, $f'(1) = 0,3$ und $0,5 \leq f''(x) \leq 0,6$ für alle $x \in [1,2]$. Geben Sie ein möglichst kleines Intervall an, in dem $f(2)$ liegt.

Aufgabe 15: Untersuchen Sie die Funktionenfolgen $(f_n)_{n\geq 1}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

1. $f_n(x) := \frac{1}{1+nx^2}$ auf $\mathbb{R}$
2. $f_n(x) := \exp(-nx^2)$ auf $\mathbb{R}$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k}$ auf $[0,1]$.

Aufgabe 16: Beweisen Sie eine Reihendarstellung für

$$F(y) := \int_0^y \frac{1}{1+x}\, dx, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Existiert

$$\lim_{y \to 1^-} F(y)$$

und wenn ja, welche reelle Zahl ist dieser Grenzwert? Geben Sie eine Reihendarstellung für den Grenzwert an.

Zusatzaufgabe (muß nicht, kann aber abgegeben werden):

1. Sei $1 \leq p \leq n+1$. Schreiben Sie das Integralrestglied R_n in der Form

   $$R_{n,p}(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1-p}(x-t)^{p-1}\, dt$$

   und beweisen Sie mit Hilfe des erweiterten Mittelwertsatzes der Integralrechnung: Es gibt ein $\theta \in (0,1)$ mit

   $$R_{n,p}(x) = \frac{1}{n!\, p} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^{n+1-p}.$$

2. Zeigen Sie mit Hilfe des sogenannten Cauchy'schen Restgliedes $R_{n,1}$, daß die Funktion $f(x) := (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, für $|x| < 1$ durch ihre Taylorreihe um Null dargestellt wird.

Abgabetermin: Mittwoch, 23. Mai vor der Vorlesung. Bitte geben Sie stets die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.