Übungsblatt 5

Analysis II

R. Wallisser / Th. Nopper

Aufgabe 17:

1. Zeigen Sie
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2}+\frac{n}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{n}{(2n-1)^2}\right)=\frac{1}{2},$$
indem Sie geeignete Zwischensummen für das Riemannsche Integral der Funktion $f(x) := (1+x)^{-2}$ über $[0,1]$ betrachten.

2. Zeigen Sie auf einem entsprechenden Weg
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\log 2.$$

Aufgabe 18: Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien $f_n, g_n : D \to \mathbb{R}$, wobei $\phi \neq D \subseteq \mathbb{R}$.

1. Zeigen Sie: Sind $(f_n)_{n\geq 1}$ und $(g_n)_{n\geq 1}$ punktweise konvergent auf D, dann ist auch $(f_n \cdot g_n)_{n\geq 1}$ punktweise konvergent auf D.

2. Beweisen oder widerlegen Sie: Sind $(f_n)_{n\geq 1}$ und $(g_n)_{n\geq 1}$ gleichmäßig konvergent auf D, dann ist auch $(f_n \cdot g_n)_{n\geq 1}$ gleichmäßig konvergent auf D.

3. Gilt die Aussage in 2. unter der zusätzlichen Annahme, daß die Grenzfunktionen f und g auf D beschränkt sind?

Aufgabe 19:

1. Es werde $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) := \frac{2nx}{(1+nx^2)^2}$. Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$ und $\int_0^1(\lim_{n\to\infty} f_n(x))\,dx$. Was können Sie aus diesem Ergebnis bezüglich der Konvergenz der Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ schließen?

2. Wo ist die Funktion $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, differenzierbar und welches ist die Ableitung?

Aufgabe 20:

1. Es sei $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Zeigen Sie $\sin(f(x)) \in \mathcal{R}[a,b]$ und
$$\int_a^b \sin(f(x))\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_a^b (f(x))^{2n+1}\,dx.$$

2. Berechnen Sie $\int_0^1 \sin(e^x)\,dx$ mit Hilfe von 1.

Abgabetermin: Donnerstag, 31. Mai vor der Vorlesung. Bitte geben Sie stets die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.