Übungsblatt 6

Analysis II

R. Wallisser / Th. Nopper

Aufgabe 21:

1. Es sei $f(x) := \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$. Untersuchen Sie die Existenz von $\int_0^1 f(x)\,dx$ und berechnen Sie gegebenenfalls diesen Wert.

2. Zeigen Sie durch Vergleich mit dem Integral $\int_1^n \frac{1}{x}\,dx$, daß die Folge $a_n := \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} - \log n$ konvergiert.

Aufgabe 22:

1. Für alle reellen Zahlen a, b mit $0 < a < b$ sei $f \in C[a, b]$. Es gebe eine Konstante $C > 0$, so daß $|\int_1^x f(t)\,dt| \leq C$ gilt für alle $x > 1$. Ferner sei $\lim_{x\to 0^+} f(x) = A$. Zeigen Sie, daß $\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx$ existiert und den Wert $A \cdot \log\left(\frac{b}{a}\right)$ hat.
   Hinweis: Beachten Sie die Definition
   $$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx := \lim_{\substack{R\to\infty \\ \delta\to 0^+}} \int_\delta^R \left(\frac{f(ax)}{x} - \frac{f(bx)}{x}\right)\,dx$$
   und substituieren Sie geeignet.

2. Berechnen Sie $\int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,dx$.

Aufgabe 23:

1. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gelte $a_n \geq 0$. Ferner gelte $\sum_{n=0}^\infty a_n < \infty$ und der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ sei 1. Zeigen Sie, daß die Reihe in $0 \leq x \leq 1$ gleichmäßig konvergiert.
   Hinweis: Setzen Sie $r_N := \sum_{n=N}^\infty a_n$ und drücken Sie a_n durch r_n aus.

2. Wo ist die Funktion $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ stetig?

Aufgabe 24:

1. Seien $\mathrm{Si}, \mathrm{Fr} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch
   $$\mathrm{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \qquad \text{(„Integralsinus“)}$$
   und
   $$\mathrm{Fr}(x) := \int_0^x \sin(t^2)\,dt \qquad \text{(„Fresnel-Integral“).}$$
   Sind Si bzw. Fr um Null in eine Taylorreihe entwickelbar? Wenn ja, geben Sie diese Entwicklungen an.

2. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der obigen Taylorreihen.

Abgabetermin: Mittwoch, 13. Juni vor der Vorlesung. Bitte geben Sie stets die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Übungen zur Vorbereitung auf die Klausur

Aufgabe 1: Geben Sie eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1},\ f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ an, die die folgenden 3 Eigenschaften besitzt:

1. $(f_n)_{n\geq 1}$ ist punktweise konvergent auf $[0,1]$.
2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f_n \in \mathcal{R}[0,1]$.
3. $\lim_{n\to\infty} f_n \notin \mathcal{R}[0,1]$.

Aufgabe 2: Lösen Sie das Anfangswertproblem $f'' - f = 0,\ f(0) = 1,\ f'(0) = 0$ auf die folgenden zwei verschiedenen Weisen:

1. Durch einen Potenzreihenansatz.
2. Durch Umformulierung auf ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung.

Aufgabe 3: Sei $f_n(x) := nxe^{-n^\alpha x},\ x \in [0,1],\ \alpha \in \mathbb{R}$.

1. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert $(f_n)_{n\geq 1}$ punktweise?
2. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert $(f_n)_{n\geq 1}$ gleichmäßig?
3. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n$?
4. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{n\to\infty} f_n' = (\lim_{n\to\infty} f_n)'$?

Aufgabe 4: Berechnen Sie die folgenden Integrale, bzw. geben Sie eine Stammfunktion an:

1. $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\, dx$
2. $\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \frac{\cos(\log x)}{x}\, dx$
3. $\int \frac{\log x}{x}\, dx \qquad$ auf $(0,\infty)$
4. $\int \frac{1}{x \log x}\, dx \qquad$ auf $(1,\infty)$.

Aufgabe 5:

1. Zeigen Sie, daß es sich bei

$$||f||_1 := \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \qquad \text{und} \qquad ||f||_2 := \int_a^b |f(t)|\, dt$$

   um Normen auf dem Vektorraum $C[a,b]$ handelt.

2. Gibt es $C_1 > 0, C_2 > 0$, so daß $C_1||f||_2 \leq ||f||_1 \leq C_2||f||_2$ gilt für alle $f \in C[a,b]$? (Dann heißen $||\cdot||_1$ und $||\cdot||_2$ äquivalent).

Hinweis: Diese Übungen brauchen nicht abgegeben zu werden und bleiben ohne Bewertung.