Übungsblatt 7

Analysis II

R. Wallisser / Th. Nopper

Aufgabe 25:

1. Sei $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie für die p-Norm im $\mathbb{R}^n$: $\lim_{p\to\infty} ||\vec{x}||_p = ||\vec{x}||_\infty$.

2. Sei $\mathbb{R}^{\mathcal{N}} := \{(x_i)_{i\geq 0} \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ für alle } i \geq 0\}$ die Menge aller Folgen in $\mathbb{R}$. Es werde eine Abbildung $d : \mathbb{R}^{\mathcal{N}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{N}} \to \mathcal{R}$ definiert durch

$$d(\vec{x}, \vec{y}) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i(1 + |x_i - y_i|)}, \quad \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}.$$

   Zeigen Sie, daß d die folgenden 3 Eigenschaften einer Metrik besitzt:

   (a) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}} : \quad d(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \vec{y}$

   (b) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}} : \quad d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x})$

   (c) $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}} : \quad d(\vec{x}, \vec{y}) \leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{z}, \vec{y})$.

Aufgabe 26: Unter der abgeschlossenen Hülle $\overline{M}$ einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ versteht man die Vereinigung von M mit der Menge der Häufungspunkte von M. Dabei heißt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ Häufungspunkt von M, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in M \cap (U_\varepsilon(x_0) \backslash \{x_0\})$ gibt. Zeigen Sie:

1. $\overline{M}$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Obermengen von M.

2. $M \subseteq \overline{M}$, $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$, $\overline{\phi} = \phi$

3. $\overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$

4. $\overline{M_1 \cap M_2} \subseteq \overline{M_1} \cap \overline{M_2}$.

Zeigen Sie durch ein Beispiel, daß in 4. im allgemeinen nicht Gleichheit gilt.

Aufgabe 27:

1. Seien K, L kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, daß dann auch die Menge $K + L := \{x + y \mid x \in K, y \in L\}$ kompakt ist.

2. Ist die Vereinigung endlich vieler kompakter Mengen wieder kompakt?

3. Ist die Vereinigung unendlich vieler kompakter Mengen wieder kompakt?

Aufgabe 28: An welchen Punkten sind die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig?

1.

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{1}{x}\sin(xy^2) & \text{falls} \quad x \neq 0 \\ y^2 & \text{falls} \quad x = 0 \end{cases}$$

2.

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3y^2}{x^8+y^4} & \text{falls} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Abgabetermin: Donnerstag, 21. Juni vor der Vorlesung. Bitte geben Sie stets die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.