Übungsblatt 8

Analysis II

R. Wallisser / Th. Nopper

Aufgabe 29: Sei $\phi \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$. Mit $\mathring{A}$ werde die Menge der inneren Punkte von A bezeichnet und

$$\partial A := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\vec{x}) \cap A \neq \phi \text{ und } U_\varepsilon(\vec{x}) \cap CA \neq \phi\}$$

sei die Menge der Randpunkte von A. Hierbei sei $CA := \mathbb{R}^n \backslash A$ das Komplement von A. Zeigen Sie:

1. $\mathring{A}$ ist offen
2. ∂A ist abgeschlossen.

Aufgabe 30: Zeigen Sie: Die Gesamtheit der Intervalle $O_\alpha := (0, \alpha)$, $0 < \alpha < 1$, bildet eine offene Überdeckung des Intervalls $(0, 1)$, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Aufgabe 31: Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Man zeige: f ist gleichmäßig stetig, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ mit $||\vec{x} - \vec{y}||_\infty < \delta$ gilt: $||f(\vec{x}) - f(\vec{y})||_\infty < \varepsilon$.

Hinweis: Wählen Sie in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ geeignete Basen und verwenden Sie die diesbezügliche Matrixdarstellung von f.

Aufgabe 32:

1. Es seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetige reelwertige Funktionen. Zeigen Sie, daß $f + g$ und $f \cdot g$ ebenfalls an jeder Stelle des $\mathbb{R}^n$ stetig sind.
2. Seien $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : E \to \mathbb{R}^l$ stetig und es gelte $f(D) \subseteq E$. Beweisen Sie, daß $g \circ f : D \to \mathbb{R}^l$ ebenfalls stetig ist.

Anleitung: Untersuchen Sie, wie die entsprechenden Beweise für Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abzuändern sind.

Abgabetermin: Donnerstag, 28. Juni vor der Vorlesung. Bitte geben Sie stets die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.