Übungsblatt 9

Analysis II

R. Wallisser / Th. Nopper

Aufgabe 33:

1. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Teilmenge, die jede rationale Zahl r mit $r \in [0,1]$ enthält. Zeigen Sie: $[0,1] \subseteq A$.
2. Beweisen Sie: Jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ einer kompakten Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt.

Aufgabe 34:

1. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $\vec{x} \notin A$. Man zeige: Es gibt ein $d > 0$, so daß für alle $\vec{y} \in A$ gilt: $||\vec{x} - \vec{y}|| \geq d$.
2. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $A \cap K = \phi$. Man zeige: Es gibt ein $d > 0$, so daß für alle $\vec{x} \in A$ und $\vec{y} \in K$ gilt: $||\vec{x} - \vec{y}|| \geq d$.
3. Gilt die Aussage in 2. auch dann, wenn weder A noch K kompakt sind?

Aufgabe 35: Für $n \geq 3$ sei $f(\vec{x}) := ||\vec{x}||_2^{2-n},\ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\vec{0}\}$. Zeigen Sie:

$$\sum_{j=1}^{n} f_{x_j x_j}(\vec{x}) = 0.$$

Aufgabe 36: Es sei $\vec{v} \in \mathbb{R}^n,\ ||\vec{v}||_2 = 1,\ \vec{a} \in \mathbb{R}^n,\ D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : D_f \to \mathbb{R}$. Existiert der Grenzwert

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{a}) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{a} + t\vec{v}) - f(\vec{a})}{t},$$

so heißt $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{a})$ die Richtungsableitung von f nach $\vec{v}$ in $\vec{a}$.

1. Es werde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z) := x^3 y + 3xz + 4z$. Bestimmen Sie $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{a})$ für $\vec{v} := (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$.
2. Es sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an der Stelle $\vec{x_0}$ differenzierbar und $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $||\vec{v}||_2 = 1$. Zeigen Sie:
$$\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(\vec{x_0}) = \langle\ (\text{grad } g)(\vec{x_0}), \vec{v}\ \rangle\ .$$
3. Sei f die Funktion aus 1. Für welche Richtung $\vec{v}$ hat $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1,1)$ einen maximalen Wert?

Abgabetermin: Donnerstag, 5. Juli vor der Vorlesung. Bitte geben Sie stets die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.