Mathematisches Institut 18.04.02
Prof. Dr. R. Wallisser

Übungen zur Vorlesung

Elementare Zahlentheorie — SS 2002

Blatt 1

Abgabe: Donnerstag, 25.04.02 vor der Vorlesung

Aufgabe 1.
Seien $a, b, a_i, 1 \leq i \leq n$, natürliche Zahlen. Man zeige:

a) $\mathrm{ggT}\ (a, b) = \mathrm{ggT}\big(a + b, \mathrm{kgV}(a, b)\big)$

b) Es gibt ganze Zahlen $x_1, \ldots, x_n$, so daß

$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n = \mathrm{ggT}(a_1, \cdots, a_n)$.

Aufgabe 2.
Es seien $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k$ von Null verschiedene ganze Zahlen mit
$a_ib_i = n(1 \leq i \leq k)$. Man zeige:

a) $\mathrm{ggT}\ (a_1, \ldots, a_k)\ \mathrm{kgV}\ (b_1, \ldots, b_k) = |n|$

b) Gilt $\mathrm{ggT}\ (a_i, a_j) = 1$ für $i \neq j$, so ist $\mathrm{kgV}\ (a_1, \ldots, a_k) = |a_1 \ldots a_k|$.

Aufgabe 3.

a) Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $\prod_{k=1}^{n} k$ durch $\sum_{k=1}^{n} k$ teilbar?

b) Zeigen Sie, daß keine n–te Teilsumme

$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad n > 1$

der harmonischen Reihe eine ganze Zahl ist.

Man zeige:

a) $P(x) = x^2 - x + 41$ nimmt für alle natürlichen Zahlen $1 \leq x \leq 40$ eine Primzahl an. (Machen Sie eine Tabelle).

b) Es gibt kein nicht konstantes Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten, welches die Menge der natürlichen Zahlen in die Menge der Primzahlen abbildet.