Mathematisches Institut 25.04.2002
Prof. Dr. R. Wallisser

Übungen zur Vorlesung

Elementare Zahlentheorie — SS 2002

Blatt 2

Abgabe: Dienstag, 30.04.02, 9.00 Uhr, vor der Vorlesung

Aufgabe 1.

a) Man bestimme, ohne die Addition auszuführen, den genauen Exponenten k mit

$$3^k || \ 54 + 81 + 189 + 360 + 729.$$

b) Man gebe die kanonische Zerlegung der Zahl 20! an.

c) Mit wievielen Nullen endet die dezimale Darstellung von $n!$?

d) Wie groß ist die Anzahl der quadratfreien Teiler einer natürlichen Zahl?

Aufgabe 2.

a) Bestimme kgV $[1, 2, 3, \ldots, 10]$.

b) Bestimme ggT $(168, 189, 315)$.

c) Man gebe ein Beispiel für ganze Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ mit ggT $(a_1, \ldots, a_n) = 1$, aber ggT $(a_i, a_j) \neq 1$ für $1 \leq i < j \leq n$ an.

d) Bestimme mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus $d =$ ggT (225847, 365681) und stelle d als ganzzahlige Linearkombination von 225847 und 365681 dar.

Aufgabe 3.

Man gebe, wenn es möglich ist, eine Parameterdarstellung an für die ganzzahligen Lösungen der Gleichungen

a) $3x - 5y = 7$,

b) $21x - 35y = 24$,

c) $97x - 127y = 1$,

d) $91x - 143y = 13$.

Aufgabe 4.

Es seien $x, y \in \mathsf{R}$. Zeige für die Gauß–Klammer

$$[x] := \max\{a \in \mathsf{Z} \mid a \leq x\} \quad \text{(größte ganze Zahl} \leq x)$$

i) $[2x] + [2y] \geq [x] + [y] + [x + y]$

ii) Leite mit i) ab, daß für $m, n \in \mathsf{N}$ gilt

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!} \in \mathsf{Z}$$

(Anleitung: $\operatorname{ord}_p n! = [\frac{n}{p}] + [\frac{n}{p^2}] + \ldots$).