Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Wallisser

30.04.2002

Übungen zur Vorlesung

Elementare Zahlentheorie — SS 2002

Blatt 3

Abgabe: Dienstag, 07.05.02, 9.00 Uhr, vor der Vorlesung

Aufgabe 1.

a) Es seien g und m natürliche Zahlen. Man zeige: Es gibt Zahlen a und b mit ggT $(a, b) = g$ und kgV $(a, b) = m$ genau dann wenn $g|m$ gilt.

b) Seien a, n und m natürliche Zahlen $a \geq 2$. Man zeige :

$$\mathrm{ggT}\big(a^n - 1,\ a^m - 1\big) = a^{\mathrm{ggT}(m,n)} - 1.$$

Aufgabe 2.
Seien a, b, c, d von Null verschiedene ganze Zahlen. Es sollen gelten:

i) ggT $(a, b, c)\big|\, d$.

ii) Die ganzen Zahlen x_0, u_0, y_0, z_0 genügen den Relationen.

$$a\,x_0 + \mathrm{ggT}(b, c)u_0 = d$$
$$b\,y_0 + c\,z_0 = \mathrm{ggT}(b, c).$$

Zeigen Sie, daß die allgemeine Lösung der linearen diophantischen Gleichung

$$a\,x + b\,y + c\,z = d$$

in der Form geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{\mathrm{ggT}(b, c)}{\mathrm{ggT}(a, b, c)}\, t \\ y &= y_0u_0 - \frac{ay_0}{\mathrm{ggT}(a, b, c)}\, t + \frac{c}{\mathrm{ggT}(b, c)}\, s, \qquad t, s \in \mathbb{Z} \\ z &= z_0u_0 - \frac{az_0}{\mathrm{ggT}(a, b, c)}\, t - \frac{b}{\mathrm{ggT}(b, c)}\, s. \end{aligned}$$

Aufgabe 3.
Man zeige: Es gibt kein Pythagoraisches Dreieck, dessen Flächeninhalt das Quadrat einer ganzen Zahl ist.

Aufgabe 4.
Man projiziere den Einheitskreis $E\,c\,\mathbb{R}^2(x^2 + y^2 = 1)$ vom Punkt (-1,0) aus auf die y Achse und zeige:

a) Jedem Punkt $(x_0, y_0) \in E \cap \mathbb{Q}^2$ entspricht ein $(0, t)$ mit $t \in \mathbb{Q}$ und umgekehrt.

b) Leiten Sie aus a) eine Parameterdarstellung für die primitiven Pythagoräischen Tripel her.