Mathematisches Institut 14.05.2002
Prof. Dr. R. Wallisser

Übungen zur Vorlesung

Elementare Zahlentheorie — SS 2002

Blatt 5

Abgabe: Dienstag, 28.05.02, 9.00 Uhr, vor der Vorlesung

Aufgabe 1.

a) Es sei $m \in \mathbb{N}$. Man zeige: Jede Lösung in ganzen Zahlen x und y der kubischen Gleichung $x^3 + y^3 = m$ genügt der Ungleichung $\max\{|x|, |y|\} \leq 2\sqrt{\frac{m}{3}}$.

b) Zeige mit Hilfe von a), daß 1729 die kleinste natürliche Zahl ist, die sich auf genau zwei Arten als Summe von zwei Kubikzahlen schreiben läßt.

Aufgabe 2.

a) Man ermittle (durch Probieren) die „Grundeinheiten“ und damit die ersten drei Lösungen der Pellschen Gleichung $x^2 - 6y^2 = 1$.

b) Wie groß sind Teileranzahl und Teilersumme von 2002?

c) Wie groß ist die Anzahl der quadratfreien Teiler a einer natürlichen Zahl n?

d) Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist die Anzahl der Teiler von n durch 4 teilbar?

e) Gibt es natürliche Zahlen (unendlich viele?) deren Teileranzahl und Teilersumme Primzahlen sind?

Aufgabe 3.

Die Teilersummenfunktion $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wird definiert durch $\sigma(n) := \sum\limits_{d|n} d$. Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt vollkommen, wenn $\sigma(n) = 2n$. Zeige:

a) Für $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$ gilt $\sigma(m \cdot n) = \sigma(m) \cdot \sigma(n)$.

b) Für $p \in \mathbb{P}, \alpha \in \mathbb{N}$ gilt: $\sigma(p^\alpha) = \dfrac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1}$.

c) Für $p \in \mathbb{P}$ und $2^p - 1 \in \mathbb{P}$ ist $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ vollkommen.

d) Wenn die gerade Zahl $n = 2^s t(s, t \in \mathbb{N}, t$ ungerade) vollkommen ist, dann gilt $t = 2^{s+1} - 1 \in \mathbb{P}$. Damit folgt $s + 1 \in \mathbb{P}$.

Aufgabe 4.

Zeigen Sie:

a) Eine ungerade vollkommene Zahl besitzt mindestens drei verschiedene Primfaktoren.

b) Eine ungerade vollkommene Zahl der Form $12n + 1$ besitzt mindestens sieben verschiedene Primfaktoren.