Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Wallisser 28.05.2002

Übungen zur Vorlesung

Elementare Zahlentheorie — SS 2002

Blatt 6

Abgabe: Dienstag, 04.06.02, 9.00 Uhr, vor der Vorlesung

Aufgabe 1.
Es sei

(D_1) $\quad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

mit a, b, c, d, e, f aus $\mathbb{Z}$ die allgemeine quadratische diophantische Gleichung.
Man zeige:

a) (D_1) ist genau dann lösbar in ganzen x und y, wenn die diophanthische Gleichung,

(D_2) $\quad py^2 + qy + r - z^2 = 0,\ p := b^2 - 4ac,\ \ q := 2bd - 4ae,\ \ r := d^2 - 4af,$

eine Lösung in ganzen y und z hat.

b) (D_2) ist genau dann lösbar in ganzen y und z falls die „verallgemeinerte Pellsche Gleichung“,

(D_3) $\quad w^2 - 4pz^2 = q^2 - 4pr,$

eine Lösung in ganzen w und z hat.

c) Untersuchen Sie, ob die quadratische Gleichung

$$x^2 + 6xy - 4y^2 - 4x - 12y - 19 = 0$$

ganzzahlige Lösungen in x und y hat. Geben Sie gegebenenfalls Lösungen an.

Aufgabe 2.
Es sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Eulersche φ–Funktion

a) Man zeige: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es unendlich viele $a \in \mathbb{N}$ mit $n|\varphi(a)$.

b) Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}$, für die $\varphi(n)$ eine Potenz von 2 ist.

Aufgabe 3.
Seien f und g zahlentheoretische Funktionen und F bzw. G ihre Summenfunktionen.
Zeigen Sie für $a \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{d|a} f(d) G\Big(\frac{a}{d}\Big) = \sum_{d|a} g(d) F\Big(\frac{a}{d}\Big).$$

Aufgabe 4.
Zeigen Sie, daß man in der Gruppe der multiplikativen zahlentheoretischen Funktionen mit $f(1) \neq 0$ die n-te Wurzel ziehen kann, d.h. ist $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ multiplikativ, $f(1) \neq 0$, dann gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists g : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \text{ mit } f = \underbrace{g \star g \star \ldots \star g}_{n-mal}.$$