Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Wallisser

04.06.2002

Übungen zur Vorlesung

Elementare Zahlentheorie — SS 2002

Blatt 7

Abgabe: Dienstag, 11.06.02, 9.00 Uhr, vor der Vorlesung

Aufgabe 1.
Man zeige:

a) Gilt für ein $n \in \mathbb{N}$ $\varphi(n) \,\big|\, (n-1)$, so ist n quadratfrei.

b) Ist $n \notin \mathbb{P}$ und gilt $\varphi(n) \,\big|\, (n-1)$, so hat n wenigstens drei Primfaktoren.

c) Es gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ für welche $\varphi(n)$ eine Quadratzahl ist.

d) Goldbach (1690–1764) vermutete, daß jede gerade Zahl größer als zwei Summen von zwei Primzahlen ist. Erdös (1913–1997) vermutet: Zu jeder geraden Zahl $2n$ gibt es ganze Zahlen q und r, so daß $\varphi(q) + \varphi(r) = 2n$ gilt. Impliziert die Goldbachsche Vermutung diejenige von Erdös?

Aufgabe 2.
Es sei $\Lambda \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ definiert durch:

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p & \\ & \text{für} \\ 0 & \end{cases} \begin{array}{l} n = p^m, p \in \mathbb{P} \\ \\ n \text{ keine Primzahlpotenz.} \end{array}$$

Man zeige: $\Lambda = -(\mu \cdot \log) * \underline{1}$ (μ Möbiusfunktion).

Aufgabe 3.
$\lambda \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ werde definiert durch $\lambda(1) := 1$,

$$\lambda(n) := (-1)^{\alpha_1 + \cdot + \alpha_r} \quad \text{falls} \quad n = \prod_{r=1}^{r} p_r^{\alpha_r} > 1.$$

a) Zeigen Sie: λ ist multiplikativ, und es gilt

$$\sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad n = \ell^2, \ell \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Zeigen Sie: $\lambda(n) = \sum_{d^2|n} \mu\left(\frac{n}{d^2}\right)$

Aufgabe 4.

Es sei $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Man zeige

a) Ist $F(m) := \sum_{d|m} f(d)$, so gilt $\sum_{m=1}^{n} F(m) = \sum_{m=1}^{n} \left[\frac{n}{m}\right] f(m)$.

b) Man wende a) an um für die Funktionen Teileranzahl bzw. Teilersumme zu zeigen:

$$\sum_{m=1}^{n} \tau(m) = n \log n + \mathrm{O}(n), \quad \sum_{m=1}^{n} \sigma(m) = \frac{1}{2} n^2 + \mathrm{O}(n).$$

($\mathrm{O}(n^k)$ bedeutet eine Funktion $h(n)$ für die eine Konstante $C > 0$ existiert, so daß $\left|h(n)\right| \leq C \cdot n^k$ gilt).