Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Wallisser 11.06.2002

Übungen zur Vorlesung

Elementare Zahlentheorie — SS 2002

Blatt 8

Abgabe: Dienstag, 18.06.02, 9.00 Uhr, vor der Vorlesung

Aufgabe 1.

a) Für die für Re $s > 1$ erklärte Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s) = \sum_{n=1} \frac{1}{n^s}$ zeige man:

i) $\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$, Re $s > 1$.

ii) $\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}$, Re $s > 1$.

b) Man beweise, daß die für $|x| < 1$ konvergente Lambertsche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1-x^n}$ die rationale Funktion $\frac{x}{(1-x)^2}$ darstellt.

Aufgabe 2.

Man zeige:

a) Die Mersenneschen Zahlen $2^p - 1,\ p \in \mathbb{P}$ sind paarweise zueinander teilerfremd.

b) Die Fermatschen Zahlen $F_n = 2^{2^n} + 1,\ n \in N$ sind paarweise zueinander teilerfremd.

c) Kann man aus a) oder b) schließen, daß es unendlich viele Primzahlen gibt?

Aufgabe 3.

Man zeige:

a) für die n–te Primzahl gilt $p_n \le 2^{2^{n-1}}$.

b) $\pi(x) := |p \in \mathbb{P} \,\big|\, p \le x| \ge \frac{\log\log x}{\log 2},\ x \ge e$.

Aufgabe 4.

a) Man zeige: Für alle $n \in N$ gilt

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} \le \exp\Big(2 \cdot \sum_{\substack{p\in\mathbb{P} \\ p \le n}} \frac{1}{p}\Big).$$

b) Benutze a) um die Divergenz von $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$ zu zeigen.