Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Wallisser

18.06.2002

Übungen zur Vorlesung

Elementare Zahlentheorie — SS 2002

Blatt 9

Abgabe: Dienstag, 25.06.02, 9.00 Uhr, vor der Vorlesung

Aufgabe 1.
Mit der Beweismethode von Euklid zeige man: Sei h ein Polynom mit ganzen Koeffizienten,

$$h(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_r x^r, \ a_r > 0, \ r \geq 1.$$

Dann existieren unendlich viele Primzahlen p mit der Eigenschaft $p|h(n)$ für passendes $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2.
Mit Hilfe der Definition und der Produktdarstellung der Eulerschen Funktion φ zeige man, daß es unendlich viele Primzahlen gibt.

Aufgabe 3.
Durch vollständige Induktion zeige man: $\prod\limits_{p \leq n} p < 4^n$.

Hinweise: Man kann die folgenden Eigenschaften (die bei Verwendung bewiesen werden müssen!) benutzen:

i) o.B.d.A. kann n als ungerade angenommen werden.

ii) $(p \in \mathbb{P}, \ k+2 \leq p \leq 2k+1) \Rightarrow p \Big| \binom{2k+1}{k}$.

iii) $2^{2k+1} \leq \binom{2k+1}{k} + \binom{2k+1}{k+2} = 2\binom{2k+1}{k}$.

Aufgabe 4. Man beweise die Identität: Für $x \geq 2$ ist

$$\pi(x) = 1 + \sum_{3 \leq n \leq x} \left\{ 1 - \lim_{m \to \infty} \left(1 - \prod_{2 \leq k \leq n-1} \left(\sin \frac{\pi n}{k} \right)^2 \right)^m \right\}.$$