

Übungen zur Vorlesung
Elementare Zahlentheorie — SS 2002

Blatt 11

Abgabe: Dienstag, 09.07.02, 9.00 Uhr, vor der Vorlesung

Aufgabe 1.

Es seien $p, q \in \mathbb{P}$ ungerade Primzahlen mit $p \neq q$.

- a) Zeigen Sie $2^{pq} \equiv 2(pq) \Leftrightarrow \text{ord}_q 2 \mid (p-1), \text{ord}_p 2 \mid (q-1)$.
- b) Untersuchen Sie, welche der Kongruenzen wahr bzw. falsch sind:
 - i) $2^{13 \cdot 67} \equiv 2 \pmod{13 \cdot 67}$.
 - ii) $2^{19 \cdot 73} \equiv 2 \pmod{19 \cdot 73}$.

Aufgabe 2.

Lösen Sie die folgenden Kongruenzen, falls möglich:

- a) $63x \equiv 14 \pmod{105}$,
- b) $126x \equiv 7 \pmod{1001}$.

Es sei $f(x) := x^2 + x + 7$. Bestimmen Sie sämtliche Lösungen der Kongruenzen:

- c) $f(x) \equiv 0 \pmod{27}$,
- d) $f(x) \equiv 0 \pmod{81}$.

Aufgabe 3.

Eine Bande von 17 Räubern stahl einen Sack mit Goldstücken. Als sie die Beute in gleiche Teile teilen wollten, blieben 3 Goldstücke übrig. Beim Streit darüber, wer ein Goldstück mehr erhalten sollte, wurde ein Räuber erschlagen. Jetzt blieben bei der Verteilung 10 Goldstücke übrig. Erneut kam es zum Streit, und wieder verlor ein Räuber sein Leben. Jetzt ließ sich die Beute gleichmäßig verteilen. Wie viele Goldstücke waren mindestens in dem Sack?

Aufgabe 4.

Zeigen Sie mit Hilfe der Kongruenzrechnung, daß die exponentiell diophantische Gleichung

$$1 + 2^x = 3^y$$

in \mathbb{N}^2 nur die beiden Lösungen (1,1) und (3,2) hat.