Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis II — SS 2017, Serie 6
Prof. Dr. G. Wang — 29.5.2017
Dr. Ch. Ketterer

Aufgabe 4 (*(Nichtdegenerierte kritische Punkte)* (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ein kritischer Punkt $x \in \Omega$ der Funktion $f \in C^2(\Omega)$ heißt *nichtdegeneriert*, wenn die Hessematrix $D^2 f(x)$ invertierbar ist. Zeigen Sie, dass x dann ein isolierter kritischer Punkt ist: es gibt eine offene Umgebung $B_\epsilon(x)$, in der keine weiteren kritischen Punkte von f liegen.

Idee des Beweises. Angenommen, es eine folge $y_k \to x$ ($y_k \neq x$) derart gibt, dass y_k kritischer Punkte von f sind. Setze $h_k = |y_k - x|$ und $v_k = \frac{1}{h_k}(y_k - x)$. Da $|v_k| = 1$, oBdA können wir annehmen, dass $v_k \to v \in \mathbb{S}^1$. Wir behaupten dass $\partial_{e_i}\partial_v f(x) = 0$ für alle e_i, $i = 1, \cdot, n$. Die Behauptung widerspricht die Voraussetzung.
Die Behauptung folgt von: Da y_k und x kritischer Punkte von f sind, gilt $\partial_{e_i} f(x) = \partial_{e_i} f(y_k) = 0$. Betrachte

$$\begin{aligned} 0 &= \tfrac{\partial_{e_i} f(y_k) - \partial_{e_i} f(x)}{|y_k - x|} = \tfrac{\partial_{e_i} f(x + h_k v_k) - \partial_{e_i} f(x)}{h_k} \\ &= \tfrac{\partial_{e_i} f(x + h_k v) - \partial_{e_i} f(x)}{h_k} + \tfrac{\partial_{e_i} f(x + h_k v_k) - \partial_{e_i} f(x + h_k v)}{h_k} \to \partial_v \partial_{e_i} f(x), \quad \text{als } k \to \infty. \end{aligned}$$

Denn $f \in C^2$.

Bemerkung (**Lemma von Morse.**) Für nichtdegenerierter kritischer Punkte x_0, existiert eine Umgebung U von x und eine Transformation $\phi : U' \to U$ mit $0 \in U'$ und $\phi(0) = x$, so dass

$$f \circ \phi(y) = f(x_0) - \sum_{i=1}^{k} y_i^2 + \sum_{i=k+1}^{n} y_i^2, \quad \text{in } U',$$

wobei k der Index von x_0 ist.