3 Taylorentwicklung

In Aanlysis I haben wir die Taylorentwicklung von Funktionen einer Variablen eingeführt. Hier wollen wir die Taylorentwicklung von Funktionen mehrerer Variablen herleiten. Der Komplettheit halber wiederholen wir zunächst die Taylorentwicklung von Funktionen einer Variablen.

Die Idee der Taylorentwicklung ist es, eine gegebene Funktion f mit einem Polynom zu vergleichen, das mit f an einer festen Stelle x_0 „von höherer Ordnung“ übereinstimmt, das heißt einschließlich einer Reihe von Ableitungen. Dieses Polynom sollte dann auch nahe bei x_0 die Funktion gut approximieren, und das will quantifiziert werden. Für lineare sowie quadratische Polynome haben wir das in den vorigen Abschnitten schon behandelt.

Zur Erinnerung: eine Funktion $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Polynom vom Grad k, wenn es $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_k \neq 0$, so dass

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Die Menge $\mathbb{P}_k$ der Polynome vom Grad höchstens k ist ein Untervektorraum des Raums aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Basis $1, x, \ldots, x^k$, vgl. Kapitel 2, Satz 3.9.

Lemma 3.1 *Sei $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Zu $f \in C^k(I)$ gibt es genau ein Polynom $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad höchstens k mit $P^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0)$ für $j = 0, 1, \ldots, k$, und zwar*

$$P_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j. \tag{3.1}$$

P_k heißt Taylorpolynom der Ordnung k von f mit Entwicklungspunkt x_0.

Beweis: Wir betrachten die lineare Abbildung

$$F : \mathbb{P}_k \to \mathbb{R}^{k+1},\ F(P) = \big(P(0), P'(0), \ldots, P^{(k)}(0)\big).$$

Für $0 \leq j \leq k$ ist $(x - x_0)^j \in \mathbb{P}_k$ und $F\big((x - x_0)^j\big) = j! e_j$, also ist F surjektiv. Wegen $\dim \mathbb{P}_k \leq k+1$ ist F auch injektiv nach Dimensionsformel, insbesondere bilden die Funktionen $1, x - x_0, \ldots, (x - x_0)^k$ eine Basis von $\mathbb{P}_k$. Mit (3.1) gilt $P_k^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0)$ für $0 \leq j \leq k$, also ist P_k das gesuchte, eindeutig bestimmte Polynom. $\square$

Folgerung 3.1 *Das k-te Taylorpolynom mit Entwicklungspunkt x_0 eines Polynoms f vom Grad höchstens k ist f selbst.*

In der Situation von Lemma 3.1 heißt die Funktion

$$R_k : (a,b) \to \mathbb{R}, \quad R_k(x) = f(x) - P_k(x) \tag{3.2}$$

das Restglied k-ter Ordnung der Taylorentwicklung in x_0. Knackpunkt bei der Taylorentwicklung ist die Abschätzung dieses Restglieds und damit eine Aussage darüber, wie gut die Funktion durch das Taylorpolynom approximiert wird. Hierfür gibt es verschiedene mögliche Darstellungen von R_k.

Satz 3.1 (Integraldarstellung des Restglieds) *Sei $f \in C^{k+1}(I)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$, und $P_k(x) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$ das k-te Taylorpolynom im Punkt $x_0 \in I$. Dann gilt*

$$f(x) = P_k(x) + R_k(x) \qquad \textit{mit} \qquad R_k(x) = \frac{1}{k!}\int_{x_0}^x (x-y)^k\, f^{(k+1)}(y)\,dy.$$

Beweis: Durch Induktion über $k \in \mathbb{N}_0$. Der Fall $k = 0$ folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$R_0(x) = f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(y)\,dy.$$

Der Induktionsschritt ist analog beruht auf partieller Integration, und zwar gilt für $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
R_k(x) &= R_{k-1}(x) - \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \\
&= \frac{1}{(k-1)!}\int_{x_0}^x (x-y)^{k-1} f^{(k)}(y)\,dy - \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \\
&= \frac{1}{(k-1)!}\left[-\frac{(x-y)^k}{k}\, f^{(k)}(y)\right]_{y=x_0}^{y=x} + \frac{1}{k!}\int_{x_0}^x (x-y)^k\, f^{(k+1)}(y)\,dy - \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \\
&= \frac{1}{k!}\int_{x_0}^x (x-y)^k\, f^{(k+1)}(y)\,dy.
\end{aligned}$$

□

Für die zweite Darstellung verwenden wir den Mittelwertsatz der Integralrechung.

Lemma 3.2 (Kapitel 5, Folgerung 1.2) *Seien $f, \varphi : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi \geq 0$ auf I (oder $\varphi \leq 0$ auf I). Dann gibt es ein $\xi \in I$ mit*

$$\int_a^b f\varphi = f(\xi)\int_a^b \varphi.$$

Beweis: Wir nehmen $\varphi \geq 0$ an, und definieren die stetige Funktion

$$F : I \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^b \big(f(y) - f(x)\big)\varphi(y)\,dy.$$

Ist $x \in I$ Minimalstelle (Maximalstelle) von f, so folgt $F(x) \geq 0$ (bzw. $F(x) \leq 0$). Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $\xi \in I$ mit $F(\xi) = 0$. □

Satz 3.2 (Lagrangedarstellung des Restglieds) *Sei $f \in C^{k+1}(I)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gibt es zu $x_0, x \in I$ ein ξ zwischen x_0 und x, so dass gilt:*

$$f(x) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + R_k(x) \qquad \textit{mit} \qquad R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}. \tag{3.3}$$

Beweis: Sei zum Beispiel $x \geq x_0$, also $(x-y)^k \geq 0$ auf $[x_0, x]$. Wir wenden Lemma 3.2 auf die Integraldarstellung des Restglieds aus Satz 3.1 an und folgern für ein $\xi \in [x_0, x]$

$$R_k(x) = f^{(k+1)}(\xi)\int_{x_0}^x \frac{(x-y)^k}{k!}\,dy = f^{(k+1)}(\xi)\,\frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

□

Beispiel 3.1 Betrachte für $x \in (-1,1)$ die Funktion $f(x) = (1-x)^{-1/2}$, mit Ableitungen

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1-x)^{-3/2} \quad \text{und} \quad f''(x) = \frac{3}{4}(1-x)^{-5/2}.$$

Es gilt $f(0) = 1$ und $f'(0) = 1/2$, also lautet das Taylorpolynom der Ordnung Eins in $x_0 = 0$

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + \frac{1}{2}x,$$

mit der Lagrange-Restglieddarstellung

$$R_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2}x^2 = \frac{3}{8}(1-\xi)^{-5/2}x^2 \quad \text{für ein } \xi \in [0,x].$$

Als Anwendung erhalten wir für die relativistische Energie eines Teilchens mit Ruhemasse m_0 und Geschwindigkeit v, wenn wir $\beta = v/c$ setzen,

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0c^2\Big(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{f''(\xi)}{2}\beta^4\Big) = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 + \Delta E.$$

Dabei ist der erste Term die Ruheenergie und der zweite die klassische kinetische Energie. Für den relativistischen Korrekturterm ergibt sich aus der Restglieddarstellung die Abschätzung

$$\frac{\Delta E}{E_{kin}} = f''(\xi)\beta^2 \le f''(\beta^2)\beta^2 < 0{,}008 \quad \text{für } \beta \le 0{,}1.$$

Bei Geschwindigkeiten $v \le \frac{1}{10}c$ beträgt die relativistische Korrektur weniger als ein Prozent der klassischen kinetischen Energie.

Allgemein gilt folgende Approximationseigenschaft des Taylorpolynoms.

Satz 3.3 (Approximation durch das Taylorpolynom) *Sei $f \in C^k(I)$ für $k \in \mathbb{N}_0$, und P_k das k-te Taylorpolynom von f mit Entwicklungspunkt $x_0 \in I$. Dann ist P_k das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad höchstens k mit*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_k(x)}{(x-x_0)^k} = 0.$$

Beweis: Nach Satz 3.2 gibt es zu $x \in I$ ein ξ zwischen x_0 ud x mit

$$\frac{f(x) - P_k(x)}{(x-x_0)^k} = \frac{f(x) - P_{k-1}(x)}{(x-x_0)^k} - \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0) = \frac{1}{k!}\big(f^{(k)}(\xi) - f^{(k)}(x_0)\big).$$

Da $f^{(k)}$ stetig, ist $|f^{(k)}(\xi) - f^{(k)}(x_0)| < \varepsilon$ für $|x - x_0| < \delta$, womit die Konvergenz gegen Null bewiesen ist. Für die Eindeutigkeit ist zu zeigen: ist $P = \sum_{j=0}^k a_j(x-x_0)^j$ mit $(x-x_0)^{-k}P(x) \to 0$ für $x \to x_0$, so ist P das Nullpolynom. Ist induktiv $a_0 = \ldots = a_{j-1} = 0$ für ein $j \in \{0,\ldots,k\}$ gezeigt, so folgt aber

$$a_j = \lim_{x\to x_0}(x-x_0)^{-j}P(x) = \lim_{x\to x_0}(x-x_0)^{k-j}(x-x_0)^{-k}P(x) = 0.$$

□

Wir haben bis jetzt die Differenz $f(x) - P_k(x)$ für festes k und $x \to x_0$ untersucht. Jetzt nehmen wir einen anderen Standpunkt ein und fragen uns, ob die Folge $P_k(x)$ die Funktion $f(x)$ für $k \to \infty$ approximiert.

Definition 3.1 *Für $f \in C^\infty(I)$ und $x_0 \in I$ heißt die Reihe*

$$P(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j$$

Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt x_0.

Die Taylorreihe ist eine Potenzreihe, mit Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$. Nach dem Satz vom Konvergenzradius gibt ein $R \in [0, \infty]$, so dass die Reihe für $|x - x_0| < R$ absolut konvergiert, für $|x - x_0| > R$ dagegen divergiert, siehe Kapitel 2, Satz 4.10. Selbst wenn die Reihe einen positiven Konvergenzradius hat, muss sie aber keineswegs gegen die gegebene Funktion konvergieren.

Beispiel 3.2 Betrachte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

Es gilt $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ nach Folgerung 2.4, Kapitel 4, insbesondere $f^{(j)}(0) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$. Also sind die Koeffizienten der Taylorreihe alle Null und damit auch alle Partialsummen, die Reihe konvergiert somit gegen die Nullfunktion, nicht gegen f. Übrigens hätten wir dies auch aus dem Identitätssatz für Potenzreihen, Satz 4.11 in Kapitel 2, schließen können, denn die Menge $f^{-1}\{0\}$ hat einen Häufungspunkt in $x = 0$.

Definition 3.2 *Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt analytisch, wenn es zu jedem $x_0 \in (a, b)$ eine Umgebung $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ gibt, auf der f als Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 darstellbar ist.*

Nach der folgenden Aussage kommt als Potenzreihe nur die Taylorreihe in Frage, und die Analytizität kann durch Abschätzung des Restglieds nachgewiesen werden.

Proposition 3.1 *Für $f : I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *f ist auf I als Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 darstellbar.*

(b) *$f \in C^\infty(I)$, und für alle $x \in I$ konvergiert das k-te Restglied $R_k(x)$ der Taylorentwicklung in x_0 mit $k \to \infty$ gegen Null.*

Die darstellende Potenzreihe ist notwendig die Taylorreihe von f in x_0.

Beweis: Nach Voraussetzung in (a) konvergiert die Potenzreihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j$ auf I, also ist ihr Konvergenzradius mindestens $\delta > 0$. Nach Kapitel 5, Satz 3.3 und Lemma 3.1, ist dann $f \in C^\infty(I)$ und Ableitungen können durch gliedweise Differentiation ermittelt werden. Wir erhalten

$$f^{(k)}(x_0) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j j! \delta_{jk} = k! a_k.$$

Folglich ist die Potenzreihe die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt x_0, und weiter

$$R_k(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j = f(x) - \sum_{j=0}^{k} a_j (x - x_0)^j \to 0 \quad \text{mit } k \to \infty,$$

nach Voraussetzung. Umgekehrt folgt aus den Voraussetzungen von (b)

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j = P_k(x) = f(x) - R_k(x) \to f(x).$$

$\square$

Die mehrdimensionale Taylorentwicklung orientiert sich am Fall $n = 1$, nur ist der Notationsaufwand größer. Im folgenden sei stets $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $f \in C^k(\Omega)$ definieren wir die k-te Ableitung $D^k f(x)$ an der Stelle $x \in \Omega$ als k-Linearform $D^k f(x) : \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, wobei

$$D^k f(x)(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} (\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f)(x)(v_1)_{i_1} \ldots (v_k)_{i_k}. \tag{3.4}$$

Ist außerdem Ω konvex, so betrachten wir für $x_0, x \in \Omega$ die C^k-Funktion, vgl. Folgerung 3.1,

$$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R},\ \varphi(t) = f(x_0 + th) \quad \text{mit } h = x - x_0.$$

Wir zeigen nun durch Induktion die Formel

$$\varphi^{(k)}(t) = D^k f(x_0 + th)(h, \ldots, h). \tag{3.5}$$

Für $k = 1$ gilt das nach Kettenregel und Satz 3.1, denn

$$\varphi'(t) = Df(x_0 + th)h = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x_0 + th) h_i.$$

Für $k \geq 2$ ergibt sich induktiv

$$\begin{aligned} \varphi^{(k)}(t) &= \frac{d}{dt} \sum_{i_1,\ldots,i_{k-1}=1}^{n} (\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_{k-1}} f)(x_0 + th)\, h_{i_1} \ldots h_{i_{k-1}} \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_{k-1}=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (\partial_i\, \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_{k-1}} f)(x_0 + th)\, h_i\, h_{i_1} \ldots h_{i_{k-1}} \\ &= D^k f(x_0 + th)(h, \ldots, h). \end{aligned}$$

Satz 3.2, angewandt auf die Funktion φ, liefert sofort eine erste Fassung der mehrdimensionalen Taylorentwicklung.

Lemma 3.3 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, und sei $f \in C^{k+1}(\Omega)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gibt es zu x_0, $x \in \Omega$ ein $\xi = (1-\tau)x_0 + \tau x$, $\tau \in [0,1]$, so dass mit $h = x - x_0$ gilt:*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{D^j f(x_0)(h, \ldots, h)}{j!} + \frac{D^{j+1} f(\xi)(h, \ldots, h)}{(j+1)!}.$$

Beweis: Wir wenden auf die C^{k+1}-Funktion $\varphi(t) = f(x_0 + th)$ die eindimensionale Taylorsche Formel an, mit Entwicklungspunkt $t_0 = 0$. Nach Satz 3.2 gibt es ein $\tau \in [0,1]$ mit

$$\varphi(1) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} + \frac{\varphi^{(k+1)}(\tau)}{(k+1)!}.$$

Einsetzen von (3.5) liefert die Behauptung. □

Die k-te Ableitung $D^k f(x)(h,\ldots,h)$ ist eine Summe von n^k Termen, von denen viele aber gleich sind wegen der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen. Um dies ökonomischer zu gestalten, und vor allem um wie im Eindimensionalen eine Taylordarstellung mit Basispolynomen zu gewinnen, wird die sogenannte Multiindexnotation eingeführt. Für $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ setzen wir

$$\begin{aligned}
|\alpha| &= \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \quad \text{Ordnung von } \alpha,\\
\alpha! &= (\alpha_1)! \cdot \ldots \cdot (\alpha_n)! \quad \alpha\text{-Fakultät},\\
x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} \quad \text{Monom mit Exponent } \alpha,\\
D^\alpha &= \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} \quad (D^0 = \mathrm{Id}),
\end{aligned}$$

Die Zahl α_ν in D^α gibt also an, wie oft nach der Koordinate x_ν zu differenzieren ist.

Satz 3.4 (Taylorentwicklung im $\mathbb{R}^n$) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, und sei $f \in C^{k+1}(\Omega)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gibt es zu x_0, $x \in \Omega$ ein $\xi = (1-\tau)x_0 + \tau x$, $\tau \in [0,1]$, so dass gilt:*

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{D^\alpha f(\xi)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha.$$

Beweis: Die Anzahl der Tupel $(i_1,\ldots,i_k)$ in $D^k f(x_0)(h,\ldots,h)$, in denen nach jeder der Koordinaten x_ν genau α_ν-mal differenziert wird, ist

$$\binom{k}{\alpha_1} \cdot \binom{k-\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \binom{k-(\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1})}{\alpha_n} = \frac{k!}{(\alpha_1)!\ldots(\alpha_n)!} = \frac{k!}{\alpha!}.$$

Die Behauptung folgt somit aus Lemma 3.3 und der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen, siehe Kapitel 6, Folgerung 2.1. □

Mit Induktion über k sieht man, die Zahl der Multindizes mit $|\alpha| = k$ ist

$$\#\{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| = k\} = \binom{k+n-1}{n-1} = \frac{(k+n-1)\cdot \ldots \cdot (k+1)}{(n-1)!},$$

aber das werden wir nicht verwenden. Wir stellen nur fest, dass diese Zahl für große k etwa gleich $k^{n-1}/(n-1)!$ ist, und damit viel kleiner als n^k. Eine Funktion $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Polynom vom Grad $k \ge 0$, wenn es Koeffizienten $a_\alpha \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_\alpha \neq 0$ für mindestens ein α der Ordnung k, so dass

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha x^\alpha \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Sei $\mathbb{P}_k$ der Raum der Polynome im $\mathbb{R}^n$ vom Grad höchstens k, und

$$F : \mathbb{P}_k \to \mathbb{R}^N,\ F(P) = \sum_{|\alpha| \le k} D^\alpha P(x_0) e_\alpha.$$

Hier ist $N = N(n,k)$ die Anzahl der Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \le k$, und die Standardbasis des $\mathbb{R}^N$ wird mit e_α, $|\alpha| \le k$, nummeriert. Wegen $F\big((x-x_0)^\alpha\big) = \alpha! e_\alpha$ für $|\alpha| \le k$ ist F

surjektiv und damit aus Dimensionsgründen injektiv, vgl. Lemma 3.1; die Monome $(x-x_0)^\alpha$, $|\alpha| \leq k$, bilden eine Basis von $\mathbb{P}_k$. Hieraus folgt (vgl. Lemma 3.1): das k-te Taylorpolynom

$$P_k(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha \tag{3.6}$$

ist das eindeutige Polynom vom Grad höchstens k mit $D^\alpha P(x_0) = D^\alpha f(x_0)$ für $|\alpha| \leq k$.

Folgerung 3.2 *Das k-te Taylorpolynom mit Entwicklungspunkt x_0 eines Polynoms f vom Grad höchstens k ist f selbst.*

Beispiel 3.3 (Polynomialformel) Die Funktion $f(x) = (x_1 + \ldots + x_n)^k$ ist ein Polynom vom Grad k, und es gilt

$$D^\alpha f(0) = \begin{cases} k! & \text{falls } |\alpha| = k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit Folgerung 3.2 (oder direkt durch Abzählen) ergibt sich

$$(x_1 + \ldots + x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha.$$

Die Approximationseigenschaft des Taylorpolynoms gilt auch ganz analog, nur müssen wir im Nenner Beträge setzen, da bekanntlich durch Vektoren nicht dividiert werden kann.

Satz 3.5 (Approximation durch das Taylorpolynom im $\mathbb{R}^n$) *Sei $f \in C^k(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}_0$, und P_k das k-te Taylorpolynom von f mit Entwicklungspunkt $x_0 \in \Omega$. Dann ist P_k das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad höchstens k mit*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_k(x)}{|x-x_0|^k} = 0.$$

Beweis: Nach Satz 3.4, mit k statt $k+1$, gibt es zu $x \in \Omega$ ein ξ zwischen x_0 und x mit

$$f(x) - P_k(x) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(\xi) - D^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha.$$

Da $D^\alpha f$ stetig und $|(x-x_0)^\alpha| \leq |x-x_0|^k$, ist die Konvergenz gegen Null gezeigt. Für die Eindeutigkeit sei $P(x)$ ein Polynom vom Grad höchstens k mit $|x-x_0|^{-k} P(x) \to 0$ für $x \to x_0$. Wäre P nicht das Nullpolynom, so gibt es ein $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq x_0$, mit $P(x) \neq 0$. Das eindimensionale Polynom $\varphi(t) = P(x_0 + t(x-x_0))$ hat Grad höchstens k, und es folgt

$$\left|\frac{\varphi(t)}{t^k}\right| = |x-x_0|^k \left|\frac{P(x_0 + t(x-x_0))}{|t(x-x_0)|^k}\right| \to 0 \quad \text{mit } t \to 0.$$

Nach Satz 3.3 ist φ das Nullpolynom, im Widerspruch zu $\varphi(1) = P(x) \neq 0$. $\square$

Um das relative Verhalten von Funktionen bei Grenzprozessen zu beschreiben, werden oft die Landauschen Symbole $\mathcal{O}$ und o benutzt. Seien f, g zwei Funktionen, die auf $B_\delta(x_0)$ definiert sind, und es gelte $g(x) \neq 0$ für x nahe bei x_0. Dann schreibt man

$$f(x) = o(g(x)) \text{ für } x \to x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0,$$
$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \text{ für } x \to x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \limsup_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < \infty.$$

In Worten: die Funktion $f(x)$ ist klein-o von $g(x)$ beziehungsweise groß-$\mathcal{O}$ von $g(x)$ für $x \to x_0$. Diese Begriffe sind analog für Grenzwerte $|x| \to \infty$ usw. erklärt. Im obigen Approximationssatz gilt $f(x) - P_k(x) = o(|x - x_0|^k)$ für $x \to x_0$, aber häufig wird das in Form einer Entwicklung geschrieben:

$$f(x) = P_k(x) + o(|x - x_0|^k) \quad \text{für } x \to x_0.$$

Beispiel 3.4 Wir berechnen hier mit der Multiindexnotation die Taylorentwicklung erster Ordnung im Punkt $(1, 1)$ für

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}.$$

Es ist $f(1, 1) = 0$, und die partiellen Ableitungen der Funktion lauten

$$D^{(1,0)} f(x, y) = \frac{2y}{(x + y)^2} \quad D^{(0,1)} f(x, y) = -\frac{2x}{(x + y)^2}$$
$$D^{(2,0)} f(x, y) = -\frac{4y}{(x + y)^3} \quad D^{(1,1)} f(x, y) = \frac{2(x - y)}{(x + y)^3} \quad D^{(0,2)} f(x, y) = \frac{4x}{(x + y)^3}.$$

Das Taylorpolynom erster Ordnung ist somit

$$\begin{aligned} P_1(x, y) &= f(1, 1) + D^{(1,0)} f(1, 1)\big((x, y) - (1, 1)\big)^{(1,0)} + D^{(0,1)} f(1, 1)\big((x, y) - (1, 1)\big)^{(0,1)} \\ &= \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{2}(y - 1) = \frac{1}{2}(x - y). \end{aligned}$$

Das Restglied lautet in Lagrangedarstellung mit Zwischenpunkt (ξ, η)

$$\begin{aligned} R_1(x, y) &= \frac{D^{(2,0)} f(\xi, \eta)}{2!\,0!}\big((x, y) - (1, 1)\big)^{(2,0)} + \frac{D^{(1,1)} f(\xi, \eta)}{1!\,1!}\big((x, y) - (1, 1)\big)^{(1,1)} \\ &\quad + \frac{D^{(0,2)} f(\xi, \eta)}{0!\,2!}\big((x, y) - (1, 1)\big)^{(0,2)} \\ &= \frac{2}{(\xi + \eta)^3}\big(- \eta(x - 1)^2 + (\xi - \eta)(x - 1)(y - 1) + \xi(y - 1)^2\big). \end{aligned}$$

Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$, die in der Nähe jedes Punkts $x_0 \in \Omega$ durch eine Potenzreihe

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha| = k} a_\alpha (x - x_0)^\alpha \quad \text{mit } a_\alpha \in \mathbb{R}$$

dargestellt werden können, heißt reell-analytisch. Unsere eindimensionalen Überlegungen lassen sich auch in diesem Punkt verallgemeinern, worauf wir jedoch aus Zeitgründen verzichten.

4 Parameterabhängige Integrale

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels behandlen wir als Anwendung der partiellen Ableitung parameterabhängige Integrale. Sei dazu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall. Für eine gegebene Funktion $f : \Omega \times I \to \mathbb{R}$, $f = f(x, y)$, betrachten wir die neue Funktion

$$\phi : \Omega \to \mathbb{R},\ \phi(x) = \int_I f(x, y)\, dy. \tag{4.7}$$

Diese Funktion wird als parameterabhängiges Integral bezeichnet, wobei die Parameter hier die Punkte $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$ sind. Damit ϕ wohldefiniert ist, müssen die Integrale existieren, also sollte für jedes $x \in \Omega$ die Funktion $f(x, \cdot) : I \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x, y)$, Riemann-integrierbar sein. Wir interessieren uns für die Stetigkeit und Ableitung der Funktion $\phi(x)$. Dabei werden wir benutzen, dass stetige Funktionen auf kompakten Mengen gleichmäßig stetig sind, vgl. Kapitel 6, Satz 1.8.

Satz 4.1 (Stetigkeit von Parameterintegralen) *Sei $f \in C^0(\Omega \times I)$, $f = f(x, y)$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $I = [a, b]$ kompakt. Dann ist die Funktion*

$$\phi : \Omega \to \mathbb{R},\ \phi(x) = \int_I f(x, y)\, dy,$$

wohldefiniert und stetig.

Beweis: Die Funktion ist wohldefiniert, denn für $x \in \Omega$ ist $f(x, \cdot) \in C^0(I)$, also Riemann-integrierbar. Zu $x \in \Omega$ gibt es ein $\delta_0 > 0$ mit $K := \{x' \in \mathbb{R}^n : |x' - x| \leq \delta_0\} \subset \Omega$. Da $K \times I$ kompakt, ist $f : K \times I \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, insbesondere gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta \in (0, \delta_0]$, so dass für alle $y \in I$ gilt:

$$|f(x', y) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{b - a} \quad \text{für } |x' - x| < \delta.$$

Wir erhalten für $|x' - x| < \delta$ die Abschätzung

$$|\phi(x') - \phi(x)| \leq \int_I |f(x', y) - f(x, y)|\, dy < \varepsilon.$$

□

Wir gehen direkt weiter zur Differenzierbarkeit und Berechnung der Ableitung.

Satz 4.2 (Differentiation unter dem Integral) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $I = [a, b]$. Für $f : \Omega \times I \to \mathbb{R}$ mit $f(x, \cdot) \in C^0(I)$ für alle $x \in \Omega$ setze $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$, $\phi(x) = \int_I f(x, y)\, dy$. Ist $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in C^0(\Omega \times I)$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$, so folgt*

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y)\, dy.$$

Sind f und $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ in $C^0(\Omega \times I)$, so ist $\phi \in C^1(\Omega)$.

Beweis: Zu $x \in \Omega$ wähle $\delta_0 > 0$, so dass $K = \{x' \in \mathbb{R}^n : |x' - x| \leq \delta_0\} \subset \Omega$. Da $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ gleichmäßig stetig auf $K \times I$ ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta \in (0, \delta_0]$, so dass für alle $y \in I$ gilt:

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x', y) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y)\Big| < \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad \text{für } |x' - x| < \delta.$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$\frac{f(x + he_j, y) - f(x, y)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{d}{ds} f(x + she_j, y)\, ds = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + she_j, y)\, ds.$$

Für $h \in [-\delta, \delta]$ und $s \in [0, 1]$ ist $|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x + she_j, y) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y)| < \varepsilon/(b - a)$, also

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{\phi(x + he_j) - \phi(x)}{h} - \int_I \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y)\, dy\Big| &= \Big|\int_I \Big(\frac{f(x + he_j, y) - f(x, y)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y)\Big)\, dy\Big| \\
&= \Big|\int_I \int_0^1 \big(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x + she_j, y) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y)\big)\, ds dy\Big| \\
&\leq \int_I \int_0^1 \Big|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x + she_j, y) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y)\Big|\, ds dy \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit ist die Differentiationsregel gezeigt. Die Zusatzaussage folgt nun aus Satz 4.1. □

Beispiel 4.1 Wir berechnen hier das Integral der Gaußschen Dichtefunktion (das früher auf 10-Mark-Scheinen zu finden war)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Der Beweis ist trickreich und ich bezweifle, dass ich selbst auf ihn gekommen wäre. Und zwar betrachten wir die Funktion

$$F : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ F(x) = \Big(\int_0^x e^{-\xi^2} d\xi\Big)^2,$$

und berechnen mit dem Hauptsatz und anschließender Substitution $\xi = xy$, also $d\xi = x dy$,

$$F'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-\xi^2}\, d\xi = \int_0^1 2xe^{-(1+y^2)x^2}\, dy = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy,$$

wobei $f(x, y) = -e^{-(1+y^2)x^2}/(1 + y^2)$. Da f auf $(0, \infty) \times [0, 1]$ glatt ist, können wir nach Satz 4.2 den Operator $\frac{\partial}{\partial x}$ herausziehen, und mit $\phi(x) = \int_0^1 f(x, y)\, dy$ folgt

$$\phi'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy = F'(x).$$

Nun gilt $F(0) - \phi(0) = \int_0^1 (1 + y^2)^{-1}\, dy = \arctan 1 = \pi/4$, also $F(x) = \phi(x) + \pi/4$ für alle $x \in [0, \infty)$. Aber $|\phi(x)| \leq e^{-x^2} \to 0$ mit $x \to \infty$, und so

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \lim_{x\to\infty} \sqrt{F(x)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

In dieser Vorlesung werden wir aus Zeitgründen kein mehrdimensionales Integral behandeln, dies soll in Analysis 3 ausführliches Thema sein. Immerhin können wir als nützliche Anwendung hier die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge in Mehrfachintegralen folgern.

Satz 4.3 (Kleiner Fubini) *Seien $I = [a, b]$, $J = [\alpha, \beta]$ kompakte Intervalle. Dann gilt*

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy \right) dx \qquad \text{für } f \in C^0(I \times J).$$

Beweis: Wir betrachten die Funktionen $\phi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit

$$\phi(x) = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^x f(\xi, y)\, d\xi \right) dy \quad \text{und} \quad \psi(x) = \int_a^x \left(\int_\alpha^\beta f(\xi, y)\, dy \right) d\xi.$$

Nach Satz 4.1 sind $y \mapsto \int_a^x f(\xi, y)\, d\xi$ sowie $\xi \mapsto \int_\alpha^\beta f(\xi, y)\, dy$ stetig, und damit beide Seiten wohldefiniert mit $\phi(a) = \psi(a) = 0$. Wir zeigen $\phi'(x) = \psi'(x)$ für alle $x \in I$, woraus die Behauptung $\phi(b) = \psi(b)$ folgt. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert

$$\psi'(x) = \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy.$$

Weiter hat die Funktion $F(x, y) = \int_a^x f(\xi, y)\, d\xi$ die partielle Ableitung $\frac{\partial F}{\partial x} = f \in C^0(I \times J)$, und aus Satz 4.2 folgt

$$\phi'(x) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\, dy = \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy.$$

$\square$

Viele interessante Parameterintegrale sind uneigentliche Integrale, zum Beispiel bei der Definition der Gammafunktion oder der Fouriertransformation. Aus Zeitgründen können wir darauf jetzt nicht eingehen, werden aber Parameterintegrale nochmals innerhalb der Theorie des Lebesgue-Integrals im dritten Semester aufgreifen.