Woche 2

• Beispiele der nicht quadrierbaren Mengen.

Beispiel 1.1. Die Menge $E = \mathbb{Q} \cap [0,1] \subset \mathbb{R}$ ist nicht quadrierbar.
Diese Beispiel bedeutet: Das System der quadrierbaren Mengen ist zwar unter endlichen Vereinigungen abgeschlossen, nicht jedoch unter abzählbar unendlichen Vereinigungen. Denn Ein einzelner Punkt $\{x\} \subset \mathbb{R}$ *ist offensichtlich quadrierbar mit* $\mathrm{vol}^1(\{x\}) = 0$, *aber die abzählbar unendlichen Vereinigungen* $E = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ *nicht.*

Beispiel 1.2. Es existiert eine offene Menge, die nicht quadrierbar ist. Wähle dazu eine Abzählung $\mathbb{Q} \cap (0,1) = \{q_1, q_2, \cdots\}$ und setze für $\epsilon \in (0, 1/2)$

$$U = \cup_{k=1}^{\infty} U_k \quad \text{mit } U_k = (q_k - 2^{-k}\epsilon, q_k + 2^{-k}\epsilon).$$

Approximation durch Gitterfiguren. Jede Teilmenge kann durch Gitterfiguren von innen und von außen "gut" approximieren lässt. (Lemma1.2)

Satz 1.6 (Quadrierbarkeitskriterium) Für eine beschränkte Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

$$E \text{ quadrierbar } \Leftrightarrow \overline{\mathrm{vol}}^n(\partial E) = 0.$$

In Beispiel 1.1, gilt $\partial E = \overline{E} \cap \overline{(\mathbb{R} \backslash E)} = [0,1]$. In Beispiel 1.2, was ist ∂E? $\partial U = \overline{U} \backslash \mathrm{int}\, EU = \overline{E} \backslash U \supset [0,1] \backslash U$, da U offen ist. Man zeige wie im Skript $\overline{\mathrm{vol}}^1(\partial E) \geq 1 - 2\epsilon$.

Der Ring und der Inhalt sind abgeschlossen unter endlichener Mengenoperation. Nun betrachten wir das System der messbaren Mengen und das Maß, die unter abzählbar unendlichener Mengenoperation abgeschlossen sind.

Sei X eine Menge. Eine Funktion $\mu : X \to [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ heißt *äußeres Maß* auf X, falls gilt:

$$A \subset \cup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Diese Bedingung (2.1) ist äquivalent zu dier Monotonie (2.3) und σ-Subadditivität (2.3).
Sei μ äußeres Maß auf X. Die Menge $A \subset X$ heißt μ- *messbar*, falls gilt

$$\mu(S) \geq \mu(S \cap A) + \mu(S \backslash A) \quad \text{für alle } S \subset X.$$

Für ein äußeres Maß μ ist diese äquivalent zu

$$\mu(S) = \mu(S \cap A) + \mu(S \backslash A) \quad \text{für alle } S \subset X.$$

Beispiele ..
Wichtige Beispiele sind die *Bildmaß* $f(\mu)$ *und die Einschränkung eines äußren Masses auf einer Teilmenge* $\mu \llcorner M$.