Woche 3

Eine Nullmenge Menge $N \subset X$ ist eine Menge mit $\mu(N) = 0$. Sie ist immer messbar und ist abgeschloßen unter abzählbaren Vereinigungen. Die Nullmenge Menge spielt eine Rolle in Maßtheorie.

σ-Algebra ist ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset X$ mit

1. $X \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \backslash A \in \mathcal{A}$
3. $A_i \in \mathcal{A}$ für $i = 1, 2, \cdots \Rightarrow \quad \cup_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$.

Ein **Maß** ist eine auf einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subset X$ definierte Funktion $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ und der σ-Additivität. Das Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt *Maßraum*.

Satz 2.3 besagt: von einem äußeren Maß $\mu : 2^X \to [0, \infty]$ erhalten wir kanonisch ein Maßraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mit dem σ-Algebra $\mathcal{M} = \{\text{alle } \mu\text{-messbare Mengen} \subset X\}$ und dem maß $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$, die Einschränkung von $\mu : 2^X \to [0, \infty]$ aud $\mathcal{M}$.

Satz 2.4 besagt die Stetigkeit von dem Maß in einigem Sinne.

Definition 3.1. (Fortsetzung) Sei λ ein Inhalt auf dem Halbring $\mathcal{P} \subset X$. Ein außeres Maß μ auf X heisst Fortsetzung von λ, falls folgende zwei Bedingungen gelten:

1. $\mu_{|\mathcal{P}} = \lambda$
2. $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}$, also alle Mengen in $\mathcal{P}$ sind μ-messbar.

Nach Satz 2.3 muss ein Inhalt $\lambda : \mathcal{P} \to [0, \infty]$, der zu einem äußeren Maß fortsetzbar ist, σ-additiv sein. Deswegen betrachten wir das **Prämaß**, das ist ein Inhalt mit σ-Additivität (Definition 3.2).

Lemma 3.1. Ist $\lambda : \mathcal{P} \to [0, \infty]$ ein Prämaß, dann ist $\bar{\lambda} : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ auch ein Prämaß, wobei $\mathcal{R}$ ist der von P erzeugte Ring und $\bar{\lambda} : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ der eindeutig bestimmte Inhalt mit $\bar{\lambda}_{|\mathcal{P}} = \lambda$ in Satz 1.4.