Woche 4

Definitionen: **erzeugte σ-Algebra.** *(Definition 3.3),* **Regularität des Maßes** *(Definition 3.4)* σ **einliches Prämass und Maß** *(Definition 3.5 und 3.6) und Vollständigkeit:*
Sei λ ein maß auf $\mathcal{A}$. λ heißt vollständig, falls gilt

$$N \subset A \textit{ für ein } A \in \mathcal{A} \textit{ mit } \lambda(A) = 0 \Rightarrow N \in \mathcal{A}.$$

Satz 3.1 (Caratheodory-Fortsetzung). *Sei $\lambda : \mathcal{P} \to [0, \infty]$ ein Prämaß auf dem Halbring $\mathcal{P} \subset 2^X$. Definiere $\mu : 2^X \to [0, \infty]$ durch*

$$\mu(E) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(P_i) : P_i \in \mathcal{P}, E \subset P_i\}.$$

Dann ist μ eine Fortsetzung von λ. Man bezeichnet μ als das durch λ induzierte, außere Maß oder als Caratheodory-Fortsetzung *von λ.*

Lemma 3.2. *Sei $\lambda : \mathcal{P} \to [0, \infty]$ ein Prämaß. Ist das äußere Maß $\tilde{\mu}$ eine Fortsetzung von λ, so ist jede Menge $A \in \sigma(\mathcal{P})$ $\tilde{\mu}$-messbar.*

Proposition 3.1 *(Regularität der Caratheodory-Fortsetzung) Die Caratheodory-Fortsetzung ist regulär.*

Satz 3.2 (Messbarkeit bzgl. Caratheodory-Fortsetzung) *Sei $\lambda : \mathcal{P} \to [0, \infty]$ ein Prämaß auf X mit Caratheodory-Fortsetzung μ. Eine Menge $D \subset X$ ist genau dann μ-messbar, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen gilt:*

- *(i) Es gibt ein $E \in \sigma(\mathcal{P})$ mit $E \supset D$ und $\mu(E \backslash D) = 0$.*
- *(ii) Es gibt ein $C \in \sigma(\mathcal{P})$ mit $C \subset D$ und $\mu(D \backslash C) = 0$.*

Zusatz: *Im Fall $\mu(D) < \infty$ kann $E = \cap_{i=1}^{\infty} E^{\nu}$ gewählt werden, wobei $E^{\nu} = \cup_{\nu_i=1}^{\infty} P_i^{\nu}$ paarweise disjunkte Vereinigung von Mengen $P_i^{\nu} \in \mathcal{P}$ mit $E^1 \supset E^2 \supset \cdots$ und $\mu(E^1) < \infty$.*

Lemma 3.4 (Maximalität der Caratheodory-Fortsetzung)

Satz 3.3 (Eindeutigkeit der Maßfortsetzung) *Sei λ ein σ-endliches Prämaß auf einem X Halbring $\mathcal{P}$ über X. Ist$\mu : 2^X \to [0, \infty]$ die Caratheodory-Fortsetzung von λ und $\tilde{\mu}$ beliebige Fortsetzung, so gilt*

$$E \quad \mu\textit{-messbar} \Rightarrow E \quad \tilde{\mu}\textit{-messbar und } \tilde{\mu}(E) = \mu(E).$$

Satz 3.4 *(äußere Maße vs. Maße) Die durch Einschränkung bzw. Fortsetzung gegebe- nen Abbildungen zwischen den σ-endlichen, regulären äusseren Maßen und den σ-endlichen, vollst ändigen Maßen auf X sind zueinander invers und insbesondere bijektiv.*