Woche 5

• Auf dem Halbring $\mathcal{P}^n$ der (achsenparallelen) Quader im $\mathbb{R}^n$ ist der elementargeometrische Inhalt $\lambda^n : \mathcal{P}^n \to [0,\infty)$ ein Prämass. Deswegen knnen wir seine Caratheodory-Fortsetzung betrachten

Definition 4.1 (Lebesguemaß) *Das* Lebesguemaß *ist die Caratheodory-Fortsetzung der elementargeometrische Inhalt $\lambda^n : \mathcal{P}^n \to [0,\infty)$. d.h. $\forall E \subset \mathbb{R}^n$,*

$$\mathcal{L}^n(E) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^n(P_i) : P_i \text{ Quader, } E \subset \cup_{i=1}^{\infty} P_i\}.$$

Definitionen: Borelmenge, Borelmaß, translationsinvariantes Borelmaß.

• $\sigma(\mathcal{P}^n) = \mathcal{B}^n$ die Borelalgebra. Lebesguemaß ist regulär und σ-endlich.

Lemma 4.3 (Approximationslemma) Für eine beliebige Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

- (i) $\mathcal{L}^n(E) = \inf\{\mathcal{L}^n(U) : U \text{ offen, } U \supset E\}$,
- (ii) $\mathcal{L}^n(E) = \inf\{\mathcal{L}^n(K) : U \text{ kompakt, } U \subset E\}$.

Lemma 4.4 Ist μ translationsinvariantes Borelmaß auf $\mathbb{R}^n$, so ist jede Koordinatenhyperebene $H = x \in \mathbb{R}^n : x_i = c$ eine μ-Nullmenge. Nach Satz 4.6 unten, ist jede Hyperebene eine μ-Nullmenge.

Lemma 4.5 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzstetig, mit Konstante Λ bzgl. der Maximumsnorm $\|\cdot\|$. Dann gilt

$$\mathcal{L}^n(f(E)) \leq \Lambda^n \mathcal{L}^n(E) \text{ für alle } E \subset U.$$

Satz 4.2 (Messbarkeit bzgl. $\mathcal{L}^n$) *Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann $\mathcal{L}^n$-messbar, wenn eine der beiden (äquivalenten) Bedingungen gilt:*

- *(i) Es gibt eine Borelmenge $E \supset D$ mit $\mathcal{L}^n(E \backslash D) = 0$.*
- *Es gibt eine Borelmenge $C \subset D$ mit $\mathcal{L}^n(D \backslash C) = 0$.*

Es kann $E = \cap_{i=11}^{\infty} U_i$ mit U_i offen, $C = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ mit A_i abgeschlossen gewählt werden.

Satz 4.4 (Charakterisierung durch Translationsinvarianz). *Sei μ ein translationsinvariantes Borelmaß auf $\mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\mu(E)(E) = \theta \mathcal{L}^n(E) \quad \text{für alle } \mathcal{L}^n - \text{messbaren } E \subset \mathbb{R}^n, \text{ wobei } \theta = \mu(([0,1]^n)).$$

Satz 4.5 ($\mathcal{L}^n$-Messbarkeit von Bildmengen) Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitzstetig, zum Beispiel $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, so gilt:

- $N \subset U$ Nullmenge $\Rightarrow f(N)$ Nullmenge.
- $E \subset U$ $\mathcal{L}^n$-messbar $\Rightarrow f(E)$ $\mathcal{L}^n$-messbar.

Satz 4.6 (Bewegungsinvarianz von $\mathcal{L}^n$) *Für $S \in \mathbb{O}(\mathbb{R}^n)$ und $a \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\mathcal{L}^n(S(E)+a) = \mathcal{L}^n(E) \quad \text{für alle } E \subset \mathbb{R}^n.$$

Satz 4.7 (Lineare Transformationsformel) *Für eine lineare Abbildung $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt*

$$\mathcal{L}^n(S(E)) = |\det(S)|\mathcal{L}^n(E) \text{ für alle } E \subset \mathbb{R}^n.$$

Eine Beispiel von einer nicht $\mathcal{L}^1$-messbaren Menge in $\mathbb{R}$.