messbare Funktion $\mathcal{A}$-messbare oder μ-messbare Funktionen. **$\mathcal{A}$-Treppenfunktion**

Satz 5.1 (Grenzwerte messbarer Funktionen) Im Prinzip besagt **Satz 5.1**: Die messbarkeit der Funktionen übertragt sich unter punkterweiser Konvergenz auf den Grenzwert.

Satz 5.2 (Messbarkeit und Rechenoperationen)

Satz 5.3 (Approximation durch Treppenfunktionen) Zu jeder $\mathcal{A}$-messbaren Funktion $f : X \to [0, \infty]$ gibt es eine Folge $f_k \in \mathcal{T}^+_{\mathcal{A}}$ mit

$$f_0 \le f_1 \le \cdots \quad \text{und} \lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \text{ für alle } x \in X.$$

Für jede Treppenfunktion $\varphi \in \mathcal{T}^+(\mu)$ definieren wir ein *Integral* $I(\varphi)$ auf elementare Weise: seien $\{s_1, \cdots, s_l\} \subset [0, \infty)$ die endlich vielen Werte von φ, dann ist

$$I(\varphi) = \sum_{i=1}^{l} s_i \mu(\{\varphi = s_i\}).$$

Lemma 5.2 (Eigenschaften des Integrals auf $\mathcal{T}^+(\mu)$)

Definition 5.3 (Lebesgueintegral) *Sei μ ein Maß auf X und f eine μ-messbare Funktion. Ist $f : X \to [0, \infty]$, so setzen wir*

$$\int f d\mu = \sup\{I(\varphi) : \varphi \in \mathcal{T}^+(\mu), \varphi \le f\}.$$

In diesem Zusammenhang heißt φ Unterfunktion *von f. Ist $f : X \to [\infty, \infty]$ und sind die Integrale von $f^{\pm}$ nicht beide unendlich, so setzen wir weiter*

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \in [\infty, \infty].$$

Definition 5.4 (Integrierbarkeit) *Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar bzgl. μ, wenn sie μ-messbar ist und wenn gilt:*

$$\int f d\mu \in \mathbb{R} \quad \textit{oder äquivalent} \quad \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu < \infty.$$

Satz 5.4 (Monotonie des Integrals)

Lemma 5.3 (Tschebyscheff-Ungleichung)

Satz 5.5 (Satz über monotone Konvergenz von B. Levi) *Sei μ ein Maß auf X und $f_k : X \to [0, \infty]$ eine Folge von μ-messbaren Funktionen mit $f_1 \le f_2 \le \cdots$. Definiere $f : X \to [0, \infty]$ durch $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$. Dann gilt*

$$\int f d\mu = \lim_{k\to\infty} \int f_k d\mu.$$