Woche 7

Satz 5.5 (Satz über monotone Konvergenz von B. Levi) *Sei μ ein Maß auf X und $f_k : X \to [0, \infty]$ eine Folge von μ-messbaren Funktionen mit $f_1 \leq f_2 \leq \cdots$. Definiere $f : X \to [0, \infty]$ durch $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$. Dann gilt*

$$\int f d\mu = \lim_{k\to\infty} \int f_k d\mu.$$

Satz 5.6 (Linearität des Integrals)

Definition 5.5 (Integration über Teilmengen) Sei μ ein Maß auf X und $E \subset X$ sei μ-messbar. Dann setzen wir, wenn das rechte Integral existiert,

$$\int_E f d\mu = \int f \chi_E d\mu.$$

f heißt auf E integrierbar, wenn die Funktion $f\chi_E$ integrierbar ist.

Beispiel 5.4 (wichtige Beispiele) Betrachte für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f(x) = |x|^{-\alpha}$. Es gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)} f d\mathcal{L}^n < \infty \Leftrightarrow \alpha > n, \text{ und } \int_{B_1(0)} f d\mathcal{L}^n < \infty \Leftrightarrow \alpha < n,$$

Satz 5.7 (Majorantenkriterium) Sei $f : X \to \mathbb{R}$ μ-messbar.

- (i) f integrierbar $\Leftrightarrow$ $|f|$ integrierbar.
- (ii) Es gilt $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$, wenn das Integral von f existiert.
- (iii) Ist $g : X \to [0, \infty]$ μ-messbar mit $|f| \leq g$ μ-fast-überall und integrierbar.

Wir betrchten nun die Konvergenz von

$$\int f d\mu = \lim_{k\to\infty} \int f_k d\mu,$$

für die Folge f_k, die punktweise fast überall geben $f = \lim_{k\to\infty} f_k$ konvergiert.

Zu nächste brachten wir ein Gegenbeispiel: die Funktionen $f_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_\epsilon = \frac{1}{2\epsilon}\chi_{[-\epsilon,\epsilon]}$, die gegen

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

Es ist leicht nachzuprüfen, dass

$$\int f d\mathcal{L}^1 = 0 < 1 = \lim_{k\to\infty} \int f_k d\mathcal{L}^1.$$

Satz 6.2 (Lemma von Fatou) Sei $f_k : X \to [0, \infty]$ eine Folge von μ-messbaren Funktionen. Für $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = \liminf_{k\to\infty} f_k(x)$ gilt dann

$$\int f d\mu \leq \int \liminf_{k\to\infty} f_k d\mu.$$

Satz 6.3 (Satz über dominierte Konvergenz von Lebesgue) *Sei $f_1, f_2, c \dots$ eine Folge von μ-messbaren Funktionen, und $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ für μ-fast-alle $x \in X$. Es gebe eine integrierbare Funktion $g : X \to [0, \infty]$ mit $\sup_k |f_k(x)| \leq g(x)$ für μ-fast überall. Dann ist f integrierbar bzgl. , und es gilt*

$$\int f d\mu \leq \int \lim_{k\to\infty} f_k d\mu.$$

Es gilt sogar $\|f f_k\|_{L^1(\mu)} := \int |f f_k| d\mu \to 0$, vgl. Definition 6.1.

Anwendungen der Konvergenzsätze: **Satz 6.1 Maß mit Dichtefunktion** und

Satz 6.4 (Riemannintegrierbarkeit) *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion auf dem kompakten Intervall $I = [a, b]$. Dann gilt:*

$$f \text{ Riemannintegrierbar} \Leftrightarrow \mathcal{L}^1(\{x \in I : f \text{ist nicht stetig in } x\}) = 0.$$

In diesem Fall ist f auch Lebesgueintegrierbar, und die Integrale stimmen überein.