Satz 6.5 (Stetigkeit von Parameterintegralen) Sei X ein metrischer Raum, μ ein Maß auf Y und $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ mit $f(x, \cdot)$ integrierbar bzgl. μ für alle $x \in X$. Betrachte

$$F : X \to \mathbb{R}, F(x) = \int f(x,y) d\mu(y).$$

Es sei $f(,y)$ stetig in $x_0 \in X$ für μ-fast-alle $y \in Y$. Weiter gebe es eine μ-integrierbare Funktion $g : Y \to [0, \infty]$, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$|f(x,y)| \leq g(y) \quad \text{für alle } y \in Y \backslash N_x, \text{ mit einer } \mu\text{-Nullmenge } N_x.$$

Dann ist F stetig in x_0.

Satz 6.6 (Differentiation unter dem Integralzeichen) Sei I offenes Intervall, μ ein Maß auf Y und $f : I \to Y \to \mathbb{R}$ mit $f(x, \cdot)$ integrierbar bzgl. μ für alle $x \in I$. Setze

$$F : X \to \mathbb{R}, F(x) = \int f(x,y) d\mu(y).$$

Es sei $f(\cdot, y)$ in $x_0 \in I$ differenzierbar für μ-fast-alle $y \in Y$, und es gebe eine μ-integrierbare Funktion $g : Y \times [0, \infty]$, so dass für alle $x \in I$ gilt:

$$\frac{|f(x,y) - f(x_0,y)|}{|x - x_0|} \geq g(y) \quad \text{für alle } y \in Y \backslash N_x, \text{ mit einer } \mu\text{-Nullmenge } N_x.$$

Dann folgt

$$F'(x_0) = \int \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) d\mu(y).$$

Folgerung 6.1. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, μ ein Maß auf Y und $f : U \times Y \to \mathbb{R}$ mit $f(x, \cdot)$ integrierbar bzgl. μ für alle $x \in U$. Setze

$$F : X \to \mathbb{R}, F(x) = \int f(x,y) d\mu(y).$$

Es gebe eine μ-Nullmenge $N \subset Y$, so dass für alle $y \in Y \backslash N$ gilt: $f(\cdot, y) \in C^1(U)$ und

$$D_x(x,y)| \leq g(y) \quad \text{mit einer integrierbaren Funktion } g : Y \to [0, \infty].$$

Dann ist $F \in C^1(U)$ und es gilt für alle $x \in U$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y) d\mu(y).$$

Beispiel 6.2 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$.

Definition 6.1 (L^p-Raum) Für μ-messbares $f : X \to \mathbb{R}$ und $1 \leq p \leq \infty$ setzen wir

$$\|f\|_{L^p(\mu)} = \begin{cases} (\int |f|^p d\mu)^{1/p}, & \text{für } 1 \leq p > \infty \\ \inf\{s > 0 : \mu(\{|f| > s\} = 0\} & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

Auf $\mathcal{L}^p(\mu) := \{f : X \to \mathbb{R} : f \ \mu\text{-messbar}, \|f\|_{L^p(\mu)} < \infty\}$ betrachten wir die Äquivalenzrelation

$$f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ für } \mu\text{-fast-alle } x \in X,$$

und definieren den L^p-Raum durch $L^p(\mu) = \mathcal{L}^p(\mu)/\sim$.

Definition 6.2 (L^p-Raum) für eine Teilmenge $E \subset X$

Proposition 6.1 Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $(L^p(\mu), \|\cdot\|_{L^p(\mu)})$ ein normierter Vektorraum.

Lemma 6.1 (Youngsche Ungleichung)

Satz 6.7 (Höldersche Ungleichung) Für μ-messbare $f, g : X \to \mathbb{R}$ gilt

$$|\int fgd\mu| \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q} \quad \text{für } 1 \leq p, q \leq \infty \text{ mit } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Satz 6.8 (Minkowski-Ungleichung) Für $f, g \in L^p(\mu)$ mit $1 \leq p \leq \infty$ gilt

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Satz 6.9 (Riesz-Fischer) Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $(L^p(\mu), \|\cdot\|_{L^p(\mu)})$ vollständig, also ein Banachraum.

In den Beweis benutzt man

Lemma 6.2. Sei $1 \leq p < \infty$ und $f_k = \sum_{j=1}^k u_j$ mit $u_j \in L^p(\mu)$. Falls $\sum_{j=1}^\infty \|u_j\| > \infty$, so gelten folgende Aussagen:

(1) Es gibt eine μ-Nullmenge N, so dass $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ für alle $x \in X \backslash N$ exsitiert.

(2) Mit $f := 0$ auf N gilt $f \in L^p(\mu)$.

(3) $\|f - f_k\|_{L^p} \to 0$.