Woche 9

Satz 6.10 (Dichtheit von $C_c^0(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$). Der Satz gilt nicht für $p = \infty$! (Bemerkung 6.2)

Satz 6.13 (Egorov) *Sei μ ein Maß auf $\mathcal{A} \subset 2^X$ mit $\mu(X) < \infty$. Konvergiert die Folge f_k messbarer Funktionen punktweise μ-fast-überall gegen f, so gibt es zu $\delta > 0$ eine Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(X \backslash A) < \delta$, so dass $f_{k|A}$ gleichmäßig gegen $f_{|A}$ konvergiert.*

Satz 6.14 (Konvergenzsatz von Vitali) *Sei μ ein Maß auf $\mathcal{A} \subset 2^X$ und $1 \leq p < \infty$. Die Folge $f_{\in} L^p(\mu)$ konvergiere punktweise μ-fast- überall gegen f. Dann sind folgende Aussagen (a) und (b) äquivalent:*

(a) *$f \in L^p(\mu)$ und $\|f_n - f_k\|_{L^p} \to 0$.*

(b) *Mit $\lambda(A) = \limsup_{n\to\infty} \int_A |f_n|^p d\mu$ gilt:*

  (1) *Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $\lambda(A) < \epsilon$ für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \delta$.*

  (2) *Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein $E \in \mathcal{A}$ mit $\mu(E) < \infty$ und $\lambda(X \backslash E) < \epsilon$*

---

7 Der Satz von Fubini

Mit **Definition 7.1** von Produktmenge, erhalten wir ein Halbring $\mathcal{P}$ der Produktmengen und ein Prämaß λ in **Lemma 7.1**. Damit definieren wir ein *Produktmaß* $\alpha \times \beta$ auf $X \times Y$ von 2 äußere Maße α, β auf X und Y, durch die Caratheodory-Fortsetzung des Produktinhalts λ aus Lemma 7.1.
Für Lebesguemaß gilt

Lemma 7.2 Es gilt $\mathcal{L}^n = \mathcal{L}^k \times \mathcal{L}^m$ für $n = k + m$.

Die Grundlage für den Satz von Fubini ist

Satz 7.1 (Cavalierisches Prinzip) *Seien α und β σ-endliche äußere Maße auf X bzw. Y, und $D \subset X \times Y$ sei $\alpha \times \beta$-messbar. Dann ist $D_y = \{x \in X : (x, y) \in D\}$ α-messbar für β-fast-alle $y \in Y$, die Funktion $y \mapsto \alpha(D_y)$ ist β-messbar und es gilt*

$$(\alpha \times \beta)(D) = \int_Y \alpha(D_y) d\beta(y) = \int_Y \int_X \chi_D(x, y) d\alpha(x) d\beta(y).$$

Eine entsprechende Aussage gilt, wenn erst das β-Maß von $D_x = \{y \in Y : (x, y) \in D\}$ gebildet und dann bezüglich α über X integriert wird.