Woche 10

Satz 7.2 (Fubini) Seien α und β σ-endliche äußere Maße auf X bzw. Y und $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ sei $\alpha \times \beta$-messbar. Ist das Integral $\int f d(\alpha \times \beta)$ definiert, so gilt:

(1) für β-fast-alle $y \in Y$ ist $f(,y)$ α-messbar, und $\int_X f(x,y)d\beta(x)$ existiert,

(2) $y \mapsto \int_X f(x,y)d\alpha(x)$ ist β-messbar und $\int_Y \int_X f(x,y)d\alpha(x)d\beta(y)$ existiert,

(3)
$$\int_{X\times Y} f d(\alpha \times \beta)) = \int_Y \int_X f(x,y)d\alpha(x)d\beta(y).$$

Der Satz gilt auch mit vertauschter Reihenfolge der Integrationen, also folgt
$$\int_{X\times Y} f d(\alpha \times \beta)) = \int_X \int_Y f(x,y)d\beta(x)d\alpha(y).$$

Zusatz: Für $\alpha \times \beta$-messbares f ist die Voraussetzung erfüllt, wenn $f \geq 0$ oder wenn z.B.
$$\int_Y \int_X \int |f(x,y)|d\alpha(x)d\beta(y) < \infty.$$

Satz 7.3 (Partielle Integration) Sind für $f, g \in C^1(\mathbb{R}n)$ die Funktionen $(\partial_j f)g$, $f(\partial_j g)$ und fg integrierbar, so folgt
$$\int_\Omega (\partial_j f)g = -\int_\Omega f(\partial_j g)dx.$$

Folgerung 7.1 (Partielle Integration) Sei Für $f \in C_c^1(\Omega)$ und $g \in C^1(\Omega)$ gilt
$$\int_\Omega (\partial_j f)g = -\int_\Omega f(\partial_j g)dx.$$

Ist $X \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ so gilt außerdem
$$\int_\Omega \langle \operatorname{grad} f, X\rangle dx = -\int_\Omega f(\operatorname{div} X)dx.$$

Beispiel 8.1 **(Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$)** Betrachte die glatte Abbildung
$$\begin{array}{rcl} \phi : (0,\infty) \times (0, 2\pi) = U & \to & V = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,0) : x \geq 0\}, \\ \phi(r,\varphi) & = & (r\cos\varphi, r\sin\varphi). \end{array}$$

ϕ ist ein C^1-Diffeomorphismus.

Satz 8.1 (Transformationsformel) Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Ist $A \subset U$ $\mathcal{L}^n$-messbar, so ist auch $\varphi(A)$ $\mathcal{L}^n$-messbar und es gilt
$$\mathcal{L}^n(\varphi(A)) = \int_A |\det D\phi(x)|dx.$$

Weiter gilt für jede $\mathcal{L}^n$-messbar Funktion $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$
$$\int_V f(y)dy = \int_U f(\phi(x))|\det D\phi(x)|dx.$$

falls eines der Integrale definiert ist.