Kapitel 6

Differentiation im $\mathbb{R}^n$

1 Topologie im $\mathbb{R}^n$

Hier wiederholen wir kurz die topologischen Grundbegriffe im $\mathbb{R}^n$. Das griechische Wort $\tau\acute{o}\pi o\varsigma$ bedeutet soviel wie Ort oder Lage. Mathematisch geht es in der Topologie um Mengen mit einem Konvergenzbegriff, und stetige Abbildungen zwischen diesen Mengen. Unser Interesse gilt natürlich hauptsächlich Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, wir beginnen aber mit dem allgemeinen Begriff des metrischen Raums. Zum einen werden uns metrische Räume später vielfach begegnen, zum anderen wird so klarer, auf welche Eigenschaften des $\mathbb{R}^n$ es hier ankommt.

Definition 1.1 (Metrischer Raum) *Ein metrischer Raum ist eine Menge X mit einer Funktion $d : X \times X \to [0, \infty)$, die für alle $x, y, z \in X$ folgende Eigenschaften hat:*

> Positivität: $d(x, y) \geq 0$ *mit Gleichheit genau wenn* $x = y$,
>
> Symmetrie: $d(y, x) = d(x, y)$
>
> Dreiecksungleichung: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Wir nennen $d(x, y)$ auch den Abstand von x und y.

In dieser Definition kann X eine beliebige Menge sein, insbesondere muss X kein Vektorraum sein. Betrachten Sie als Beispiel die Menge X aller Bahnhöfe in Frankreich und

$$d(x, y) = \begin{cases} \text{minimale Fahrzeit von } x \text{ nach } y \text{ über Paris} & \text{für } x \neq y, \\ 0 & \text{für } x = y. \end{cases} \tag{1.1}$$

Viele interessante metrische Räume sind normierte Vektorräume.

Definition 1.2 (Norm) *Eine Norm auf dem reellen (oder komplexen) Vektorraum X ist eine Funktion $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*

> Positivität: $\|x\| \geq 0$, *mit Gleichheit genau wenn* $x = 0$.
>
> Halblinearität: $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in X$.
>
> Dreiecksungleichung: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *für alle* $x, y \in X$.

Das wichtigste Beispiel ist natürlich *die euklidische Norm* auf dem $\mathbb{R}^n$, also

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{für } x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{1.2}$$

Die Positivität und die Halblinearität ergeben sich dabei leicht, für die Dreiecksungleichung haben wir die Ungleichung von Cauchy-Schwarz gebraucht, siehe Satz 5.2 in Kapitel 2.

Andere Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind zum Beispiel *die* 1*-Norm* und *die Maximumsnorm*

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \qquad \text{und} \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|. \tag{1.3}$$

Bemerkung. Jeder normierte Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ wird zu einem metrischen Raum, indem wir den Abstand von zwei Punkten x, y erklären durch

$$d(x,y) = \|x - y\| \quad \text{für } x, y \in X. \tag{1.4}$$

Denn offensichtlich gilt $d(x,y) \geq 0$ mit Gleichheit nur für $x = y$, sowie

$$\begin{aligned} d(y,x) &= \|y - x\| = \|(-1)(x-y)\| = |(-1)|\,\|x-y\| = d(x,y), \\ d(x,z) &= \|x - z\| = \|(x-y) + (y-z)\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\mathbb{R}^n$ ein metrischer Raum mit dem üblichen euklidischen Abstandsbegriff.

Definition 1.3 *Sei X ein metrischer Raum. Die offene Kugel um x_0 mit Radius $r > 0$ ist*

$$B_r(x_0) = \{x \in X : d(x,x_0) < r\}.$$

Bezüglich der Euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^n$ gilt also wie gewohnt

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}.$$

Es ist instruktiv, sich die Kugeln $B_r(x_0)$ für die französische Eisenbahnmetrik aus (1.1) sowie die Kugeln $B_1(0)$ für die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$ zu überlegen.

Definition 1.4 *Sei X eine metrischer Raum. Eine Menge $\Omega \subset X$ heißt offen, falls zu jedem $x \in \Omega$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$.*

Beispiel 1.1 Die Kugel $B_r(x_0)$ ist offen im Sinn der Definition 1.4. Sei nämlich $x \in B_r(x_0)$ gegeben. Dann ist $\varepsilon = r - d(x,x_0) > 0$ und für $y \in B_\varepsilon(x)$ folgt aus der Dreiecksungleichung

$$d(y,x_0) \leq d(y,x) + d(x,x_0) < \varepsilon + d(x,x_0) = r,$$

also $B_\varepsilon(x) \subset B_r(x_0)$, was zu zeigen war.

Satz 1.1 *Für die offenen Teilmengen eines metrischen Raums X gilt:*

(a) $\emptyset, X$ *sind offen.*

(b) *Der Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen ist offen.*

(c) *Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen ist offen.*

Beweis: Aussage (a) ist klar.

Für (b) sei $x \in \bigcap_{i=1}^N \Omega_i$, wobei $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$ endlich viele offene Teilmengen von X sind. Dann gibt es $\varepsilon_i > 0$ mit $B_{\varepsilon_i}(x) \subset \Omega_i$. Es folgt $\varepsilon = \min_{1 \leq i \leq N} \varepsilon_i > 0$ sowie $B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_i}(x) \subset \Omega_i$ für jedes i, das heißt $B_\varepsilon(x) \subset \bigcap_{i=1}^N \Omega_i$.

Für (c) sei nun $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda$, wobei Λ eine beliebige Indexmenge ist. Dann ist $x \in \Omega_{\lambda_0}$ für (mindestens) ein $\lambda_0 \in \Lambda$. Da Ω_{λ_0} offen, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset \Omega_{\lambda_0}$, also erst recht $B_\varepsilon(x) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda$. $\square$

Bemerkung. Ein abzählbarer Schnitt von offenen Mengen ist nicht notwendig offen, zum Beispiel ist

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}(0) = \{0\}$$

nicht offen in $\mathbb{R}^n$. Eine offene Menge $\Omega \subset X$ mit $x \in \Omega$ nennt man auch offene Umgebung von x. Insbesondere wird die offene Kugel $B_\varepsilon(x)$ als ε-Umgebung von x bezeichnet.

Lemma 1.1 *In einem metrischen Raum X gibt es zu zwei Punkten $x, y \in X$ mit $x \neq y$ ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$.*

Beweis: Sei $z \in B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y)$. Dann folgt $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < 2\varepsilon$. Also ist die Behauptung richtig für jedes $\varepsilon \leq \frac{1}{2} d(x,y)$. $\square$

Definition 1.5 (Konvergenz) *Sei X ein metrischer Raum. Die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Punkten $x_k \in X$ konvergiert gegen $x \in X$, falls gilt:*

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $K \in \mathbb{R}$ mit $x_k \in B_\varepsilon(x)$ für alle $k > K$.

Äquivalent dazu ist $d(x_k, x) \to 0$ mit $k \to \infty$.

Bemerkung. Der Grenzwert ist eindeutig bestimmt, denn wäre $y \neq x$ ebenfalls Grenzwert von (x_k), so wählen wir $\varepsilon > 0$ wie in Lemma 1.1 und erhalten für k hinreichend groß den Widerspruch

$$x_k \in B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset.$$

Definition 1.6 *Eine Teilmenge A eines metrischen Raums X heißt abgeschlossen, wenn folgende Implikation stets gilt:*

$$x_k \in A, \quad x_k \to x \quad \Rightarrow \quad x \in A.$$

Satz 1.2 *In einem metrischen Raum X gilt für jede Menge $M \subset X$:*

$$M \text{ offen} \quad \Leftrightarrow \quad X \backslash M \text{ abgeschlossen.}$$

Beweis: Kapitel 2, Satz 5.4. □

Folgerung 1.1 *Für die abgeschlossenen Teilmengen eines metrischen Raums X gilt:*

a) $\emptyset, X$ *sind abgeschlossen.*

b) *Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*

c) *Der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*

Beweis: Folgt aus Satz 1.1 und Satz 1.2. □

Bemerkung. Die Vereinigung von unendlich vielen abgeschlossenen Mengen ist nicht notwendig abgeschlossen, zum Beispiel $\bigcup_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}, 1] = (0,1] \subset \mathbb{R}$.

Beispiel 1.2 (Relativtopologie) Ist (X, d) metrischer Raum, so ist jede Teilmenge $M \subset X$ selbst ein metrischer Raum mit der induzierten Abstandsfunktion

$$d_M : M \times M \to [0, \infty),\ d_M(x,y) = d(x,y). \tag{1.5}$$

Zum Beispiel ist die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ ein metrischer Raum mit dem euklidischen Abstand $d_{\mathbb{S}^{n-1}}(x,y) = |x-y|$.

Für die Kugeln bezüglich der induzierten Abstandsfunktion gilt

$$B_r^M(x) = \{y \in M : d_M(y,x) < r\} = \{y \in M : d(y,x) < r\} = B_r(x) \cap M.$$

1. Ist $\tilde{U}$ offen in X, so ist $\tilde{U} \cap M$ offen in (M, d_M). Denn für $x \in \tilde{U} \cap M$ gilt $B_\varepsilon(x) \subset \tilde{U}$ für geeignetes $\varepsilon > 0$, also $B_\varepsilon^M(x) \subset \tilde{U} \cap M$.

2. Umgekehrt ist jede offene Menge $U \subset (M, d_M)$ von dieser Form

   $$U = \widetilde{U} \cap M$$

   für eine offene Menge $\widetilde{U}$ in X.

   Beweis. Zu $x \in U$ gibt es ein $\varepsilon(x) > 0$ mit $B_{\varepsilon(x)}^M(x) \subset U$. Die Menge

   $$\tilde{U} = \bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon(x)}(x)$$

   ist als Vereinigung offener Kugeln offen in X, und es gilt

   $$U \subset \tilde{U} \cap M = \bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon(x)}(x) \cap M = \bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon(x)}^M(x) \subset U,$$

   also

   $$U = \widetilde{U} \cap M.$$

3. Entsprechendes gilt für die abgeschlossenen Mengen, das heißt eine Menge $A \subset (M, d_M)$ ist genau dann abgeschlossen, wenn sie von der Form $A = \tilde{A} \cap M$ ist mit $\tilde{A}$ abgeschlossen in X.

In der eindimensionalen Analysis wurden meist Funktionen auf einem Intervall I mit Randpunkten $a < b$ betrachtet. Im mehrdimenionalen Fall werden wir oft Kugeln $B_r(x)$ oder achsenparallele Quader $I_1 \times \ldots \times I_n$ betrachten, bisweilen aber auch kompliziertere Mengen. Dafür sind die folgenden Begriffe nützlich.

Definition 1.7 *Sei X ein metrischer Raum und $M \subset X$. Dann definieren wir*

$$\begin{aligned} \operatorname{int} M &= \{x \in M : \exists\, \varepsilon > 0 \textit{ mit } B_\varepsilon(x) \subset M\} && \textit{(Menge der inneren Punkte von } M\textit{)},\\ \overline{M} &= \{x \in X : \forall\, \varepsilon > 0 \textit{ ist } B_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset\} && \textit{(Abschluss von } M\textit{)},\\ \partial M &= \{x \in X : \forall\, \varepsilon > 0 \textit{ sind } B_\varepsilon(x) \cap M,\ B_\varepsilon(x) \cap (X \backslash M) \neq \emptyset\} && \textit{(Rand von } M\textit{)}. \end{aligned}$$

Trivialerweise gilt $\operatorname{int} M \subset M \subset \overline{M}$. Außerdem ist $\operatorname{int} \Omega = \Omega$ für $\Omega \subset X$ offen sowie $\overline{M} = M$ für $M \subset X$ abgeschlossen.

Beispiel 1.3 Auf dem $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Abstandsfunktion $d(x,y) = |x-y|$ gilt für die Kugel $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(y,x) < r\}$:

$$\overline{B_r(x)} = \{y \in \mathbb{R}^n : d(y,x) \leq r\} \quad \text{und} \quad \partial B_r(x) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(y,x) = r\}.$$

Als erstes zeigen wir $\overline{B_r(x)} \subset \{y \in \mathbb{R}^n : d(y,x) \leq r\}$. Zu $y \in \overline{B_r(x)}$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $z \in B_r(x)$ mit $d(y,z) < \varepsilon$, also $d(y,x) \leq d(y,z) + d(z,x) < \varepsilon + r$, und mit $\varepsilon \to 0$ folgt $d(y,x) \leq r$. Analog ergibt sich die Inklusion $\overline{\mathbb{R}^n \backslash B_r(x)} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : d(y,x) \geq r\}$, denn zu $y \in \overline{\mathbb{R}^n \backslash B_r(x)}$ gibt es ein $z \in \mathbb{R}^n \backslash B_r(x)$ mit $d(y,z) < \varepsilon$, also $d(y,x) \geq d(z,x) - d(y,z) > r - \varepsilon$, und mit $\varepsilon \to 0$ folgt $d(y,x) \geq r$. Aber $\mathbb{R}^n \backslash B_r(x) \subset \overline{\mathbb{R}^n \backslash B_r(x)}$, und somit $\overline{\mathbb{R}^n \backslash B_r(x)} = \{y \in \mathbb{R}^n : d(y,x) \geq r\}$. Ist nun $d(y,x) \leq r$, so folgt für $0 < \theta < 1$ hinreichend nahe bei Eins

$$d(x + \theta(y-x), x) = \theta |y-x| < r \quad \text{und} \quad d(x + \theta(y-x), y) = (1-\theta)|x-y| < \varepsilon,$$

das heißt $y \in \overline{B_r(x)}$ und somit $\overline{B_r(x)} = \{y \in \mathbb{R}^n : d(y,x) \leq r\}$. Wegen $\partial B_r(x) = \overline{B_r(x)} \cap \overline{(\mathbb{R}^n \backslash B_r(x))}$ folgt schließlich $\partial B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(y,x) = r\}$.

Satz 1.3 *Sei M Teilmenge des metrischen Raums X.*

(a) $\operatorname{int} M$ *ist offen, und es gilt die Implikation*

$$\Omega \textit{ offen}, \Omega \subset M \quad \Rightarrow \quad \Omega \subset \operatorname{int} M.$$

(b) $\overline{M}$ *ist abgeschlossen, und es gilt die Implikation*

$$A \textit{ abgeschlossen}, A \supset M \quad \Rightarrow \quad A \supset \overline{M}.$$

(c) ∂M *ist abgeschlossen und es gilt* $\partial M = \overline{M} \backslash \operatorname{int} M$.

Beweis: Für (a) sei $x \in \operatorname{int} M$, also $B_r(x) \subset M$ für ein $r > 0$. Für $y \in B_r(x)$ gilt dann $B_\varepsilon(y) \subset B_r(x) \subset M$ mit $\varepsilon = r - d(y,x) > 0$, vgl. Beispiel 1.1. Es folgt $B_r(x) \subset \operatorname{int} M$, damit ist $\operatorname{int} M$ offen. Sei nun Ω offen und $\Omega \subset M$. Zu $x \in \Omega$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$, also auch $B_\varepsilon(x) \subset M$, das heißt $x \in \operatorname{int} M$.

Für (b) verwenden wir (a) und Satz 1.2. Nach Definition ist $X \backslash \overline{M} = \operatorname{int}(X \backslash M)$ (Übung!), also ist $\overline{M} = X \backslash \operatorname{int}(X \backslash M)$ abgeschlossen. Ist nun $A \subset X$ eine beliebige abgeschlossene Menge mit $A \supset M$, so ist $X \backslash A$ offen sowie $X \backslash A \subset X \backslash M$, also $X \backslash A \subset \operatorname{int}(X \backslash M)$ nach (a), und somit $A \supset \overline{M}$. Dies beweist (b).

Nach Definition gilt weiter $\partial M = \overline{M} \cap \overline{(X \backslash M)}$, also ist ∂M abgeschlossen nach (b) und Folgerung 1.1. Ferner ist ebenfalls nach Definition $X \backslash \operatorname{int} M = \overline{X \backslash M}$ (Übung!), folglich

$$\partial M = \overline{M} \cap (X \backslash \operatorname{int} M) = \overline{M} \backslash \operatorname{int} M.$$

$\square$

Im Abschluss von M können noch zwei Sorten Punkte unterschieden werden, die Häufungspunkte und die isolierten Punkte.

Definition 1.8 *Ein Punkt $x \in X$ heißt*

$$\begin{aligned} &\text{Häufungspunkt von } M \quad \Leftrightarrow \quad \textit{für jedes } \varepsilon > 0 \textit{ ist } B_\varepsilon(x) \cap M \backslash \{x\} \textit{ nichtleer}, \\ &\text{isolierter Punkt von } M \quad \Leftrightarrow \quad \textit{es gibt ein } \varepsilon > 0 \textit{ mit } M \cap B_\varepsilon(x) = \{x\}. \end{aligned}$$

Bemerkung. Ist $x \in X$ Häufungspunkt von M, so enthält $B_\varepsilon(x) \cap M \backslash \{x\}$ sogar unendlich viele Punkte. Denn würde die Menge nur aus endlich vielen Punkten $y_1, \ldots, y_N$ bestehen, so ist $\delta = \min_{1 \le i \le N} d(y_i, x) > 0$ und dann $B_\delta(x) \cap M \backslash \{x\} = \emptyset$, ein Widerspruch. Insbesondere können wir eine Folge $x_k \in M \backslash \{x\}$ bestimmen mit $x_k \to x$.

Definition 1.9 *Eine Teilmenge M eines metrischen Raums X heißt dicht, falls $\overline{M} = X$.*

Bekanntes Beispiel sind die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ im metrischen Raum $\mathbb{R}$, beziehungsweise die rationalen Punkte $\mathbb{Q}^n$ im $\mathbb{R}^n$.

Definition 1.10 (Stetigkeit) *Sei D Teilmenge eines metrischen Raums X, und Y ein weiterer metrischer Raum. Eine Abbildung $f : D \to Y$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit*

$$d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \textit{für alle } x \in D \textit{ mit } d(x, x_0) < \delta,$$

oder äquivalent mit $f(B_\delta(x_0) \cap D) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$. Die Funktion f heißt stetig, wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist.

Wir müssten hier eigentlich $d_X(\cdot,\cdot)$ und $d_Y(\cdot,\cdot)$ schreiben, denn im allgemeinen sind X und Y verschiedene metrische Räume, jedoch führt die einfachere Notation nicht zu Missverständnissen.

Definition 1.11 (Lipschitzstetigkeit) *Eine Abbildung $f : D \to Y$ heißt Lipschitzstetig mit Konstante $L \geq 0$, falls*

$$d(f(x), f(x')) \leq L\, d(x, x') \quad \textit{für alle } x, x' \in D.$$

Beispiel 1.4 Die Abstandsfunktion von einem Punkt $x_0 \in X$, das heißt

$$f : X \to \mathbb{R},\ f(x) = d(x, x_0),$$

ist Lipschitzstetig mit Konstante $L = 1$, denn aus der Dreiecksungleichung folgt

$$f(x) = d(x, x_0) \leq d(x, x') + d(x', x_0) = d(x, x') + f(x').$$

Durch Vertauschen von x und x' folgt $|f(x) - f(x')| \leq d(x, x')$ wie gewünscht.

Die folgende Umformulierung der Stetigkeit erfreut sich zum Teil großer Beliebtheit.

Satz 1.4 (Charakterisierung stetiger Abbildungen) *Seien X, Y metrische Räume und $\Omega \subset X$ sei offen. Eine Abbildung $f : \Omega \to Y$ ist genau dann stetig, wenn für jede offene Menge $V \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(V)$ offen in X ist.*

Beweis: Sei f stetig, $V \subset Y$ offen und $x_0 \in f^{-1}(V)$. Dann ist $y_0 = f(x_0) \in V$, also gilt $B_\varepsilon(y_0) \subset V$ für geeignetes $\varepsilon > 0$. Es gibt dann ein $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(x_0) \cap \Omega) \subset B_\varepsilon(y_0)$. Wir können außerdem $B_\delta(x_0) \subset \Omega$ annehmen, und dann folgt $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(V)$ wie verlangt.

Umgekehrt sei $y_0 = f(x_0)$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Voraussetzung ist dann $f^{-1}(B_\varepsilon(y_0))$ offen, das heißt es gibt ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(y_0))$ beziehungsweise $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(y_0)$. $\square$

Aus der Analysis 1 wissen wir, dass noch eine dritte topologische Eigenschaft von Mengen von großer Bedeutung ist.

Definition 1.12 (Folgenkompaktheit) *Eine Teilmenge M eines metrischen Raums X heißt (folgen-)kompakt, wenn gilt: jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_k \in M$ hat eine Teilfolge $(x_{k_p})_{p \in \mathbb{N}}$, die gegen ein $x \in M$ konvergiert.*

Wir werden eine alternative Charakterisierung der Kompaktheit mittels Überdeckungen bei Gelegenheit kennenlernen. Zunächst beziehen wir uns aber stets auf Definition 1.12. Um die Kompaktheit einer Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ festzustellen, ist das folgende Kriterium sehr nützlich, das in Kapitel 4, Satz 2.2, gezeigt wurde.

Satz 1.5 (Kompaktheit im $\mathbb{R}^n$) *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Bemerkung. Diese Aussage ist in vielen metrischen Räumen falsch, das heißt es kann abgeschlossene und beschränkte Mengen geben, die nicht kompakt sind.

Folgende Aussagen über Stetigkeit und kompakte Mengen sind oft nützlich.

Satz 1.6 (Bilder kompakter Mengen) *Seien X, Y metrische Räume, D eine Teilmenge von X und $f : D \to Y$ stetig. Ist $K \subset D$ kompakt, so gilt*

(1) *$f(K)$ ist kompakte Teilmenge von Y.*

(2) *Ist f injektiv, so ist $f^{-1} : f(K) \to X$ stetig.*

Beweis: Sei (y_k) eine Folge in $M = f(K)$, also $y_k = f(x_k)$ für $x_k \in K$. Da K kompakt, gibt es eine Teilfolge mit $x_{k_j} \to x \in K$. Aus der Stetigkeit von f folgt $y_{k_j} = f(x_{k_j}) \to f(x) \in M$.

Jetzt nehmen wir indirekt an, f^{-1} sei in $y = f(x)$ unstetig. Dann gibt es eine Folge $y_k = f(x_k)$ mit $y_k \to y$, aber $d_X(x_k, x) \geq \varepsilon$ für alle k. Da K kompakt, gibt es eine Teilfolge $x_{k_j} \to x' \in K$ und es gilt $d(x', x) \geq \varepsilon$. Aber f ist stetig in x', also $f(x') = \lim_{j\to\infty} f(x_{k_j}) = y$, im Widerspruch zur Injektivität von f. □

Satz 1.7 (Extrema) *Eine stetige Funktion auf einer kompakten Teilmenge $K \neq \emptyset$ eines metrischen Raums X ist beschränkt und nimmt ihr Infimum und Supremum an.*

Beweis: vgl. Kapitel 4, Satz 2.1 □

Beispiel 1.5 Sei $K \subset X$ kompakt. Dann gibt es zu jedem $x_0 \in X$ einen nächsten Punkt $x \in K$, das heißt

$$d(x, x_0) = \inf_{y\in K} d(y, x_0) = \operatorname{dist}(x_0, K).$$

Der Punkt x ist nicht notwendig eindeutig, betrachte etwa $K = \{1, -1\} \subset \mathbb{R}$ und $x_0 = 0$.

Definition 1.13 (Gleichmäßige Stetigkeit) *Sei D Teilmenge eines metrischen Raums X, und Y ein weiterer metrischer Raum. Eine Abbildung $f : D \to Y$ heißt gleichmäßig stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit*

$$d(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \textit{für alle } x, y \in D \textit{ mit } d(x, y) < \delta.$$

Satz 1.8 (Gleichmäßige Stetigkeit) *Sei K kompakte Teilmenge eines metrischen Raums X. Dann ist jede stetige Abbildung $f : K \to Y$ gleichmäßig stetig.*

Beweis: vgl. Kapitel 5, Satz 1.4. Wäre f nicht gleichmäßig stetig, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ und $x_n, x_n' \in K$ mit $d(x_n, x_n') \to 0$, aber $d(f(x_n), f(x_n')) \geq \varepsilon$. Da K kompakt, konvergiert die Folge x_n nach evtl. Auswahl einer Teilfolge gegen ein $x \in K$. Wegen $d(x_n', x) \leq d(x_n', x_n) + d(x_n, x)$ konvergiert dann auch die Folge x_n' gegen x, und es gilt aufgrund der Stetigkeit

$$\varepsilon \leq d(f(x_n), f(x_n')) \leq d(f(x_n), f(x)) + d(f(x), f(x_n')) \to 0,$$

ein Widerspruch. □