4 Parameterabhängige Integrale

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels behandlen wir als Anwendung der partiellen Ableitung parameterabhängige Integrale. Sei dazu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $I = [a,b]$ ein kompaktes Intervall. Für eine gegebene Funktion $f : \Omega \times I \to \mathbb{R}$, $f = f(x,y)$, betrachten wir die neue Funktion

$$\phi : \Omega \to \mathbb{R},\ \phi(x) = \int_I f(x,y)\,dy. \tag{4.7}$$

Diese Funktion wird als parameterabhängiges Integral bezeichnet, wobei die Parameter hier die Punkte $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$ sind. Damit ϕ wohldefiniert ist, müssen die Integrale existieren, also sollte für jedes $x \in \Omega$ die Funktion $f(x,\cdot) : I \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x,y)$, Riemann-integrierbar sein. Wir interessieren uns für die Stetigkeit und Ableitung der Funktion $\phi(x)$. Dabei werden wir benutzen, dass stetige Funktionen auf kompakten Mengen gleichmäßig stetig sind, vgl. Kapitel 6, Satz 1.8.

Satz 4.1 (Stetigkeit von Parameterintegralen) *Sei $f \in C^0(\Omega \times I)$, $f = f(x,y)$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $I = [a,b]$ kompakt. Dann ist die Funktion*

$$\phi : \Omega \to \mathbb{R},\ \phi(x) = \int_I f(x,y)\,dy,$$

wohldefiniert und stetig.

Beweis: Die Funktion ist wohldefiniert, denn für $x \in \Omega$ ist $f(x,\cdot) \in C^0(I)$, also Riemann-integrierbar. Zu $x \in \Omega$ gibt es ein $\delta_0 > 0$ mit $K := \{x' \in \mathbb{R}^n : |x' - x| \leq \delta_0\} \subset \Omega$. Da $K \times I$ kompakt, ist $f : K \times I \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, insbesondere gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta \in (0, \delta_0]$, so dass für alle $y \in I$ gilt:

$$|f(x',y) - f(x,y)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{für } |x' - x| < \delta.$$

Wir erhalten für $|x' - x| < \delta$ die Abschätzung

$$|\phi(x') - \phi(x)| \leq \int_I |f(x',y) - f(x,y)|\,dy < \varepsilon.$$

□

Wir gehen direkt weiter zur Differenzierbarkeit und Berechnung der Ableitung.

Satz 4.2 (Differentiation unter dem Integral) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $I = [a,b]$. Für $f : \Omega \times I \to \mathbb{R}$ mit $f(x,\cdot) \in C^0(I)$ für alle $x \in \Omega$ setze $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$, $\phi(x) = \int_I f(x,y)\,dy$. Ist $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in C^0(\Omega \times I)$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$, so folgt*

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)\,dy.$$

Sind f und $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ in $C^0(\Omega \times I)$, so ist $\phi \in C^1(\Omega)$.

Beweis: Zu $x \in \Omega$ wähle $\delta_0 > 0$, so dass $K = \{x' \in \mathbb{R}^n : |x' - x| \leq \delta_0\} \subset \Omega$. Da $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ gleichmäßig stetig auf $K \times I$ ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta \in (0, \delta_0]$, so dass für alle $y \in I$ gilt:

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x', y) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y)\Big| < \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad \text{für } |x' - x| < \delta.$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$\frac{f(x + he_j, y) - f(x, y)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{d}{ds} f(x + she_j, y)\, ds = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + she_j, y)\, ds.$$

Für $h \in [-\delta, \delta]$ und $s \in [0, 1]$ ist $|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x + she_j, y) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y)| < \varepsilon/(b - a)$, also

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\phi(x + he_j) - \phi(x)}{h} - \int_I \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y)\, dy\right| &= \left|\int_I \Big(\frac{f(x + he_j, y) - f(x, y)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y)\Big)\, dy\right| \\
&= \left|\int_I \int_0^1 \big(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x + she_j, y) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y)\big)\, ds dy\right| \\
&\leq \int_I \int_0^1 \Big|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x + she_j, y) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y)\Big|\, ds dy \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit ist die Differentiationsregel gezeigt. Die Zusatzaussage folgt nun aus Satz 4.1. □

Beispiel 4.1 Wir berechnen hier das Integral der Gaußschen Dichtefunktion (das früher auf 10-Mark-Scheinen zu finden war)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Der Beweis ist trickreich, und zwar betrachten wir die Funktion

$$F : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ F(x) = \Big(\int_0^x e^{-\xi^2} d\xi\Big)^2,$$

und berechnen mit dem Hauptsatz und anschließender Substitution $\xi = xy$, also $d\xi = xdy$,

$$F'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-\xi^2}\, d\xi = \int_0^1 2xe^{-(1+y^2)x^2}\, dy = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy,$$

wobei $f(x, y) = -e^{-(1+y^2)x^2}/(1 + y^2)$. Da f auf $(0, \infty) \times [0, 1]$ glatt ist, können wir nach Satz 4.2 den Operator $\frac{\partial}{\partial x}$ herausziehen, und mit $\phi(x) = \int_0^1 f(x, y)\, dy$ folgt

$$\phi'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy = F'(x).$$

Nun gilt $F(0) - \phi(0) = \int_0^1 (1 + y^2)^{-1}\, dy = \arctan 1 = \pi/4$, also $F(x) = \phi(x) + \pi/4$ für alle $x \in [0, \infty)$. Aber $|\phi(x)| \leq e^{-x^2} \to 0$ mit $x \to \infty$, und so

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \lim_{x\to\infty} \sqrt{F(x)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

In dieser Vorlesung werden wir aus Zeitgründen kein mehrdimensionales Integral behandeln, dies soll in Analysis 3 ausführliches Thema sein. Immerhin können wir als nützliche Anwendung hier die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge in Mehrfachintegralen folgern.

Satz 4.3 (Kleiner Fubini) *Seien $I = [a,b]$, $J = [\alpha,\beta]$ kompakte Intervalle. Dann gilt*

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy \right) dx \quad \textit{für } f \in C^0(I \times J).$$

Beweis: Wir betrachten die Funktionen $\phi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$\phi(x) = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^x f(\xi,y)\,d\xi \right) dy \quad \text{und} \quad \psi(x) = \int_a^x \left(\int_\alpha^\beta f(\xi,y)\,dy \right) d\xi.$$

Nach Satz 4.1 sind $y \mapsto \int_a^x f(\xi,y)\,d\xi$ sowie $\xi \mapsto \int_\alpha^\beta f(\xi,y)\,dy$ stetig, und damit beide Seiten wohldefiniert mit $\phi(a) = \psi(a) = 0$. Wir zeigen $\phi'(x) = \psi'(x)$ für alle $x \in I$, woraus die Behauptung $\phi(b) = \psi(b)$ folgt. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert

$$\psi'(x) = \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy.$$

Weiter hat die Funktion $F(x,y) = \int_a^x f(\xi,y)\,d\xi$ die partielle Ableitung $\frac{\partial F}{\partial x} = f \in C^0(I \times J)$, und aus Satz 4.2 folgt

$$\phi'(x) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\,dy = \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy.$$

$\square$

Viele interessante Parameterintegrale sind uneigentliche Integrale, zum Beispiel bei der Definition der Gammafunktion oder der Fouriertransformation. Aus Zeitgründen können wir darauf jetzt nicht eingehen, werden aber Parameterintegrale nochmals innerhalb der Theorie des Lebesgue-Integrals im dritten Semester aufgreifen.

Kapitel 8

Kurvenintegrale und komplexe Analysis

1 Kurvenintegrale

Wir kehren hier zur eindimensionalen Analysis zurück und interessieren uns zunächst für Kurven im $\mathbb{R}^n$. Man bezeichnet jede stetige Abbildung eines Intervalls in den $\mathbb{R}^n$ als Kurve. Dies hört sich zunächst vernünftig an, allerdings lässt die Forderung der Stetigkeit noch Abbildungen zu, die anschaulich weit entfernt davon sind, eine Kurve zu sein. So hat G. Peano 1905 stetige Kurven konstruiert, die das Intervall $[0,1]$ surjektiv auf die Fläche eines Dreiecks abbilden. Wir sollten also lieber etwas mehr verlangen als nur Stetigkeit.

Definition 1.1 (C^1-Kurve) *Ist $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, I Intervall, so heißt γ C^1-Kurve im $\mathbb{R}^n$.*

Beispiel 1.1 Für $p, v \in \mathbb{R}^n$ mit $v \neq 0$ ist $\gamma(t) = p + tv$ eine parametrisierte Gerade. Der Fall $v = 0$ ist jedoch durch Definition 1.1 nicht ausgeschlossen. Die Kurve

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = (r\cos t, r\sin t) \quad \text{mit } r > 0,$$

durchläuft den Kreis vom Radius r um den Nullpunkt unendlich oft. Durch Hinzufügen einer dritten Komponente entsteht die Schraubenlinie

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ \gamma(t) = (r\cos t, r\sin t, at) \quad \text{für } a > 0.$$

Bei einem Umlauf wächst die dritte Komponente um die Höhe $2\pi a$. Das Bild der Kurve

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = (\cos t, \sin 2t)$$

sieht aus wie eine etwas deformierte Acht.

Definition 1.2 (Bogenlänge) *Die Bogenlänge einer Kurve $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, $I = [a,b]$, ist*

$$L(\gamma) = \int_I |\gamma'|.$$

Eigentlich müsste diese Formel durch Approximation von γ mit Polygonzügen, deren Länge elementar definiert ist, begründet werden. Für eine Zerlegung $a = t_0 < \ldots < t_N = b$ sollte näherungsweise gelten:

$$\sum_{i=1}^{N} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{N} \Big| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t)\, dt \Big| \approx \sum_{i=1}^{N} |\gamma'(t_i)| \Delta t_i \approx \int_I |\gamma'(t)|\, dt.$$

Wir verzichten aber hier darauf, dieses Argument rigoros zu machen.

Beispiel 1.2 Die Länge von $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t, at)$, $0 \le t \le 2\pi$, ist

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |(-r\sin t, r\cos t, a)|\, dt = 2\pi\sqrt{r^2 + a^2}.$$

Die Schraubenlinie verläuft auf dem Mantel des Zylinders $x^2 + y^2 = r^2$, und man kann das Ergebnis durch Abrollen des Zylinders mit dem Satz des Pythagoras bestätigen.

Anschaulich besteht eine Kurve aus ihrem Bild im $\mathbb{R}^n$ und einem Fahrplan, wie dieses Bild durchlaufen werden soll. In der Physik spielt der Fahrplan eine wesentliche Rolle, zum Beispiel für unsere Jahreszeiten. Die Bogenlänge ist jedoch eine geometrische Größe, und sollte nicht vom Fahrplan abhängen. Das soll nun präzisiert werden.

Definition 1.3 (Umparametrisierung) *Seien $\gamma_{1,2} : I_{1,2} \to \mathbb{R}^n$ parametrisierte Kurven. Dann heißt γ_2 Umparametrisierung von γ_1, falls eine Bijektion $\varphi \in C^1(I_2, I_1)$ mit $\varphi' \neq 0$ existiert, so dass $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$.*

Die Bijektion φ nennt man auch Parametertransformation. An dieser Stelle ergibt sich die Frage, warum wir die Bedingung $\varphi' \neq 0$ verlangen. Eine Antwort ist, dass wir jedenfalls die Differenzierbarkeit der Parametertransformationen verlangen wollen, außerdem sollte die Sache symmetrisch bezüglich γ_1 und γ_2 sein. Die Bedingung $\varphi' \neq 0$ ist aber äquivalent dazu, dass die inverse Parametertransformation φ^{-1} differenzierbar ist. Tatsächlich ist die Relation $\gamma_1 \sim \gamma_2$, falls γ_2 Umparametrisierung von γ_1, eine Äquivalenzrelation (Übungsaufgabe).

Lemma 1.1 (Invarianz der Bogenlänge) *Sind $\gamma_{1,2} \in C^1(I_{1,2}, \mathbb{R}^n)$ und ist γ_2 eine Umparametrisierung von γ_1, so folgt $L(\gamma_2) = L(\gamma_1)$.*

Beweis: Sei $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$ für $\varphi \in C^1(I_2, I_1)$ mit $\varphi' \neq 0$. Dann folgt je nach Vorzeichen von φ'

$$|\gamma_2'(t)| = |\gamma_1'(\varphi(t))||\varphi'(t)| = \pm|\gamma_1'(\varphi(t))|\varphi'(t),$$

also liefert die Substitution $s = \varphi(t)$ für $I_1 = [a_1, b_1]$ sowie $I_2 = [a_2, b_2]$

$$L(\gamma_2) = \int_{a_2}^{b_2} |\gamma_2'(t)|\, dt = \pm \int_{a_2}^{b_2} |\gamma_1'(\varphi(t)|\, \varphi'(t)\, dt = \pm \int_{\varphi(a_2)}^{\varphi(b_2)} |\gamma_1'(s)|\, ds = L(\gamma_1).$$

□

Es ist eine naheliegende Frage, ob für eine gegebene Kurve eine besonders schöne Umparametrisierung existiert. Was dabei besonders schön sein soll, sagt folgende Definition.

Definition 1.4 (Parametrisierung nach der Bogenlänge) *Eine Kurve $c \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ heißt nach der Bogenlänge parametrisiert, wenn gilt:*

$$|c'(s)| = 1 \quad \textit{für alle } s \in I.$$

Physikalisch betrachtet wird eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Absolutgeschwindigkeit Eins durchlaufen. Geometrisch folgt für jedes Teilintervall $[a, b] \subset I$

$$L(c|_{[a,b]}) = \int_a^b |c'(s)|\, ds = (b - a),$$

das heißt das Intervall wird durch c längentreu abgebildet.

Satz 1.1 (Parametrisierung nach der Bogenlänge) *Sei $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ eine Kurve mit Länge $L = L(\gamma)$. Es gelte $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Dann gibt es eine C^1-Bijektion $\varphi : [0, L] \to [a, b]$ mit $\varphi' > 0$, so dass $c = \gamma \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.*

Beweis: Wir betrachten die Bogenlängenfunktion

$$\sigma : [a, b] \to [0, L],\ \sigma(t) = \int_a^t |\gamma'(\tau)|\, d\tau. \tag{1.1}$$

Es gilt $\sigma'(t) = |\gamma'(t)| > 0$ nach Voraussetzung, also ist σ eine Bijektion der Klasse C^1. Bezeichnet $\varphi : [0, L] \to [a, b]$ die Umkehrfunktion, so folgt

$$|(\gamma \circ \varphi)'(s)| = |\gamma'(\varphi(s))|\, \varphi'(s) = |\gamma'(\varphi(s))|\, \frac{1}{\sigma'(\varphi(s))} = 1.$$

□

Eine Kurve γ mit $\gamma'(t) \neq 0$ für alle t nennt man regulär (oder immergiert). Verzichtet man auf die Bedingung der Regularität, so kann das Bild sogar einer C^∞-Kurve Singularitäten aufweisen. Ein Beispiel ist die Neilsche Parabel $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^2, t^3)$. Das Bild $\gamma(\mathbb{R}) = \{(x, \pm x^{3/2}) : x \in \mathbb{R}\}$ hat eine Spitze im Nullpunkt. Die Regularität einer Kurve bleibt unter Umparametrisierungen erhalten, denn es gilt $(\gamma \circ \varphi)' = (\gamma' \circ \varphi)\varphi'$ mit $\varphi' \neq 0$ nach Definition. Insbesondere kann auf die Voraussetzung $\gamma' \neq 0$ in Satz 1.1 nicht verzichtet werden.

Ist der Endpunkt einer Kurve der Anfangspunkt einer zweiten Kurve, so ist es naheliegend, diese zu einer Kurve zusammenzusetzen. Im allgemeinen wird das Ergebnis dann keine C^1-Kurve mehr sein. Auch stückweise lineare Kurven sind in der Regel nicht C^1. Es ist daher praktisch, als Verallgemeinerung stückweise C^1-Kurven einzuführen.

Definition 1.5 (stückweise C^1) *Eine Kurve $\gamma \in C^0([a, b], \mathbb{R}^n)$ heißt stückweise C^1, wenn es eine Zerlegung $a = t_0 < \ldots < t_N = b$ gibt, so dass mit $I_k = [t_{k-1}, t_k]$ gilt:*

$$\gamma|_{I_k} \in C^1(I_k, \mathbb{R}^n) \quad \textit{für alle } k = 1, \ldots, N.$$

Notation: $\gamma \in PC^1(I, \mathbb{R}^n)$ (piecewise continuously differentiable).

In den Unterteilungspunkten existieren die links- und rechtsseitigen Grenzwerte $\gamma'_{\pm}(t_i)$, die jedoch nicht übereinstimmen müssen. Setzen wir willkürlich $\gamma'(t_i) = 0$, so ist die Funktion $\gamma' : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stückweise stetig, insbesondere ist $|\gamma'| : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, siehe Kapitel 5, Abschnitt 1. Die Bogenlänge ist also auch für $\gamma \in PC^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ durch Definition 1.2 erklärt. Insbesondere hängt die Länge nicht von der Wahl der Unterteilung ab.

Im Folgenden bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ stets das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$.

Definition 1.6 *Ist $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $\gamma \in PC^1([a,b],\Omega)$, so heißt*

$$\int_\gamma F \cdot \vec{dx} := \int_a^b \langle F\big(\gamma(t)\big), \gamma'(t) \rangle \, dt$$

das Kurvenintegral von F längs γ.

In der Physik ist zum Beispiel F das Gravitationsfeld, und das Kurvenintegral ergibt die Arbeit, die beim Transport einer Masse längs einer Kurve innerhalb des Feldes verrichtet wird. Dabei wird $\vec{dx}$ als vektorielles Längenelement interpretiert, und der Punkt $\cdot$ bedeutet das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$. Wir haben diese Notation übernommen, obwohl sie für uns rein symbolisch ist, das heißt $\vec{dx}$ hat keine eigene mathematische Bedeutung, ähnlich wie beim Riemannintegral. Das Kurvenintegral ist allein durch die rechte Seite in Definition 1.6 erklärt. Allerdings ist die Merkregel, dass $\vec{dx}$ durch $\gamma'(t)\,dt$ zu ersetzen ist, hilfreich.

Beispiel 1.3 (Gravitationsfeld) Das Gravitationsfeld der Sonne ist gegeben durch

$$F : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^3,\ F(x) = -C \frac{x}{|x|^3} \quad \text{mit } C > 0.$$

Beispiel 1.4 (Winkelvektorfeld) Wir betrachten hier das Vektorfeld

$$W : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^2,\ W(x,y) = \Big(- \frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \Big).$$

Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, $\gamma(t) = r(t)\big(\cos\theta(t), \sin\theta(t)\big)$ mit $r, \theta \in C^1(I)$, so folgt

$$\text{(1.2)} \qquad \int_\gamma W \cdot \vec{dx} = \int_a^b \left\langle \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}, r' \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + r\theta' \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right\rangle dt = \theta(b) - \theta(a).$$

Also liefert das Kurvenintegral von W die Differenz der Polarwinkel von Endpunkt und Anfangspunkt der Kurve.

Eine Parametertransformation $\varphi : I_2 \to I_1$ heißt orientierungserhaltend (bzw. orientierungsumkehrend), wenn $\varphi' > 0$ (bzw. $\varphi' < 0$) ist. Anschaulich wird bei Umparametrisierung mit einer orientierungsumkehrenden Parametertransformation die Kurve umgekehrt durchlaufen, Anfangs- und Endpunkt tauschen ihre Rollen. Während die Bogenlänge unter allen Umparametrisierungen invariant ist, ist das Kurvenintegral nur bei orientierungserhaltenden Umparametrisierungen invariant, bei orientierungsumkehrenden Umparametrisierungen wechselt es sein Vorzeichen. Dies wird sogleich gezeigt.

Lemma 1.2 *Das Kurvenintegral hat folgende Eigenschaften:*

(a) *Linearität: sind* $F_{1,2} \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^2)$ *und* $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, *so gilt für* $\gamma \in PC^1([a,b], \Omega)$

$$\int_\gamma (\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2) \cdot \vec{dx} = \lambda_1 \int_\gamma F_1 \cdot \vec{dx} + \lambda_2 \int_\gamma F_2 \cdot \vec{dx}.$$

(b) *Additivität bei Zerlegungen: ist* $\gamma \in PC^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ *und* $a = t_0 < \ldots < t_N = b$ *eine beliebige Zerlegung von* $[a,b]$, *so folgt mit* $\gamma_i = \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$

$$\int_\gamma F \cdot \vec{dx} = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} F \cdot \vec{dx}.$$

(c) *Invarianz bei Umparametrisierungen: sei* $\gamma \in PC^1(I_1, \mathbb{R}^2)$ *und* $\varphi \in C^1(I_2, I_1)$ *eine Parametertransformation. Dann gilt, je nach Vorzeichen von* φ',

$$\int_{\gamma\circ\varphi} F \cdot \vec{dx} = \pm \int_\gamma F \cdot \vec{dx}.$$

Beweis: (a) und (b) folgen aus der Definition und den Eigenschaften des Riemannintegrals. Für (c) sei $I_1 = [a_1, b_1]$ und $I_2 = [a_2, b_2]$. Mit der Substitution $\varphi(t) = s$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma\circ\varphi} F \cdot \vec{dx} &= \int_{a_2}^{b_2} \langle (F \circ \gamma \circ \varphi)(t), (\gamma \circ \varphi)'(t) \rangle \, dt \\
&= \int_{a_2}^{b_2} \langle F \circ \gamma(\varphi(t)), \gamma'(\varphi(t)) \rangle \varphi'(t) \, dt \\
&= \int_{\varphi(a_2)}^{\varphi(b_2)} \langle (F \circ \gamma)(s), \gamma'(s)) \rangle ds.
\end{aligned}$$

Ist φ orientierungserhaltend, so gilt $\varphi(a_2) = a_1$ und $\varphi(b_2) = b_1$ und wir bekommen das Kurvenintegral. Ist φ orientierungsumkehrend, so sind die Grenzen vertauscht und wir bekommen das negative Kurvenintegral. □

Wir benötigen wie beim Riemann-Integral eine Standardabschätzung des Kurvenintegrals.

Lemma 1.3 *Sei* $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen, und* $\gamma \in PC^1(I, \Omega)$ *mit* $I = [a,b]$. *Dann gilt mit* $\|F \circ \gamma\|_I = \sup_{t \in I} |F(\gamma(t))|$

$$\left| \int_\gamma F \cdot \vec{dx} \right| \leq \|F \circ \gamma\|_I \, L(\gamma).$$

Beweis: Aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz und der Standardabschätzung des Riemann-Integrals folgt

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt \right| &\leq \int_a^b \left| \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \right| dt \\
&\leq \int_a^b \left| F(\gamma(t)) \right| \left| \gamma'(t) \right| dt \\
&\leq \|F \circ \gamma\|_I \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt \\
&= \|F \circ \gamma\|_I \, L(\gamma).
\end{aligned}$$