□

Die Physiker nennen das Gravitationsfeld konservativ, weil der Energieerhaltungssatz gilt. Die verrichtete Arbeit zum Beispiel bei Transport einer Masse vom Mathematischen Institut zum Kandel entspricht genau der zugewonnen Lageenergie, und diese kommt beim Herunterrollen auch wieder heraus, theoretisch jedenfalls. Der Begriff des konservativen Feldes ist auch in der Mathematik interessant.

Definition 1.7 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein Vektorfeld $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ heißt Gradientenfeld (bzw. konservativ), wenn es eine Funktion $\varphi \in C^1(\Omega)$ gibt mit $\operatorname{grad} \varphi = F$. Die Funktion φ heißt Stammfunktion (bzw. Potential) von F.*

Lemma 1.4 (Eindeutigkeit der Stammfunktion) *Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ wegweise zusammenhängend, so ist eine Stammfunktion von $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ eindeutig bestimmt, bis auf eine additive Konstante.*

Beweis: Sind $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1(\Omega)$ Stammfunktionen von F, so folgt

$$\operatorname{grad}(\varphi_2 - \varphi_1) = \operatorname{grad} \varphi_2 - \operatorname{grad} \varphi_1 = F - F = 0,$$

also ist $\varphi_2 - \varphi_1$ konstant nach Satz 1.1, das heißt $\varphi_2 = \varphi_1 + c$. □

Wir werden jetzt sehen, dass die Existenz einer Stammfunktion gleichbedeutend damit ist, dass das Kurvenintegral für Kurven mit gleichem Anfangs- und Endpunkt stets denselben Wert hat. Zuvor eine Definition.

Definition 1.8 *Eine Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt geschlossen, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$.*

Aus $\gamma(a) = \gamma(b)$ folgt nicht notwendig $\gamma'(a) = \gamma'(b)$, zum Beispiel ist im Fall der Acht aus Beispiel 1.1 $\gamma(\pi/2) = \gamma(3\pi/2) = (0, 0)$, während $\gamma'(\pi/2) = (-1, -2) \neq (1, -2) = \gamma'(3\pi/2)$. Anschaulich schneidet sich die Kurve hier mit einem Winkel.

Satz 1.2 (Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und wegweise zusammenhängend. Für ein Vektorfeld $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *F ist ein Gradientenfeld.*

(b) *Für jede geschlossene Kurve $\gamma \in PC^1([a, b], \Omega)$ ist $\int_\gamma F \cdot \vec{dx} = 0$.*

(c) *Für je zwei Kurven $\gamma_0, \gamma_1 \in PC^1([a, b], \Omega)$ mit $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$, $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ gilt*

$$\int_{\gamma_0} F \cdot \vec{dx} = \int_{\gamma_1} F \cdot \vec{dx}.$$

Beweis: Ist $F = \operatorname{grad} \varphi$ mit $\varphi \in C^1(\Omega)$, so folgt für $\gamma \in PC^1([a, b], \Omega)$ geschlossen

$$\int_\gamma F \cdot \vec{dx} = \int_a^b \langle \operatorname{grad} \varphi\big(\gamma(t)\big), \gamma'(t) \rangle \, dt = \int_a^b (\varphi \circ \gamma)'(t) \, dt = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) = 0.$$

Für $\gamma_{0,1} \in PC^1([a, b], \Omega)$ mit gleichem Anfangs- und Endpunkt ist die Kurve

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_0(t) & a \leq t \leq b \\ \gamma_1(2b - t) & b \leq t \leq 2b - a \end{cases}$$

geschlossen und stückweise C^1, und aus (b) ergibt sich mit Lemma 1.2

$$0 = \int_\gamma F \cdot \vec{dx} = \int_{\gamma_0} F \cdot \vec{dx} - \int_{\gamma_1} F \cdot \vec{dx}.$$

Für (c) $\Rightarrow$ (a) sei $x_0 \in \Omega$ fest. Zu $x \in \Omega$ wählen wir eine Kurve $\gamma_x \in PC^1([0,1],\Omega)$ mit $\gamma_x(0) = x_0$ und $\gamma_x(1) = x$, und setzen

$$\varphi(x) = \int_{\gamma_x} F \cdot \vec{dx}.$$

Die Existenz von γ_x ist gesichert nach Lemma 1.2 in Kapitel 7, genauer können wir γ_x stückweise linear wählen. Nach Voraussetzung (c) hängt das Kurvenintegral nicht von der Wahl von γ_x ab. Daher ist die Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ wohldefiniert. Sei nun $x \in \Omega$. Für $|h|$ klein erhalten wir eine Kurve von x_0 nach $x + he_j$, indem wir γ_x mit der Kurve $c : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $c(t) = x + the_j$, zusammensetzen. Es folgt

$$\frac{\varphi(x+he_j) - \varphi(x)}{h} = \int_c F \cdot \vec{dx} = \int_0^1 \langle F(x+the_j), e_j \rangle \, dt \to F_j(x) \quad \text{mit } h \to 0.$$

Also gilt $\partial_j \varphi = F_j$ für $j = 1, \ldots, n$. □

Die zentrale Frage dieses Kapitels ist: wie können wir entscheiden, ob ein gegebenes Vektorfeld ein Gradientenfeld ist? Für C^1-Vektorfelder gibt es eine notwendige Bedingung, die offensichtlich ist.

Satz 1.3 (Rotationsfreiheit von Gradientenfeldern) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ist $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ein Gradientenfeld, so gilt für alle $i, j = 1, \ldots, n$*

$$\partial_i F_j = \partial_j F_i \quad \text{in } \Omega.$$

Beweis: Ist $F = \operatorname{grad} \varphi$, so folgt $\varphi \in C^2(\Omega)$ und wegen der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen, Satz 2.2 in Kapitel 6, gilt

$$\partial_i F_j = \partial_i \partial_j \varphi = \partial_j \partial_i \varphi = \partial_j F_i.$$

□

Für $n = 3$ lässt sich die Bedingung schreiben als $\operatorname{rot} F = 0$, wobei

$$\operatorname{rot} F = (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1).$$

Beispiel 1.5 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (-y, x)$, hat keine Stammfunktion auf $\mathbb{R}^2$, denn

$$\partial_1 F_2 = 1, \text{ aber } \partial_2 F_1 = -1.$$

Beispiel 1.6 Für das Winkelvektorfeld

$$W : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^2,\ W(x,y) = \Big(- \frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \Big)$$

vgl. Beispiel 1.4, berechnen wir

$$\partial_1 W_2 = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \partial_2 W_1,$$

das heißt die notwendige Bedingung aus Satz 1.3 ist erfüllt. Dennoch ist das Kurvenintegral nicht wegunabhängig: für $k \in \mathbb{Z}$ und $r > 0$ ist die Kurve $\gamma_k : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, $\gamma_k(t) = r(\cos kt, \sin kt)$, geschlossen und es gilt nach Beispiel 1.4

$$\int_{\gamma_k} W \cdot \vec{dx} = 2\pi k \quad (\neq 0 \text{ für } k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}).$$

Wir wollen jetzt untersuchen, wie sich das Kurvenintegral längs einer Schar von Kurven ändert. Statt Schar verwenden wir den moderneren Ausdruck Homotopie. Dies ist ein fundamentales Konzept der Analysis.

Definition 1.9 (Homotopie) *Eine Homotopie in Ω zwischen Kurven $\gamma_0, \gamma_1 \in C^0([a,b], \Omega)$ ist eine Abbildung $\gamma \in C^0([a,b] \times [0,1], \Omega)$ mit*

$$\gamma(\cdot, 0) = \gamma_0 \quad \textit{und} \quad \gamma(\cdot, 1) = \gamma_1.$$

Gilt $\gamma_0(a) = \gamma_1(a) = p$, $\gamma_0(b) = \gamma_1(b) = q$, und gibt es eine Homotopie mit $\gamma(a,t) = p$, $\gamma(b,t) = q$ für alle $t \in [0,1]$, so heißen γ_0, γ_1 homotop in Ω mit festen Endpunkten. Gilt $\gamma_0(a) = \gamma_0(b)$, $\gamma_1(a) = \gamma_1(b)$, und gibt es eine Homotopie mit $\gamma(a,t) = \gamma(b,t)$ für alle $t \in [0,1]$, so heißen γ_0, γ_1 in Ω geschlossen homotop.

Es gilt folgende allgemeine Formel für die Änderung des Kurvenintegrals unter (hinreichend glatten) Homotopien.

Lemma 1.5 (Homotopieformel) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt für $\gamma \in C^1([a,b] \times [0,1], \Omega)$, falls $\partial_s \partial_t \gamma \in C^0([a,b] \times [0,1], \mathbb{R}^2)$,*

$$\begin{aligned}\int_{\gamma(\cdot,1)} F \cdot \vec{dx} - \int_{\gamma(\cdot,0)} F \cdot \vec{dx} \;&=\; \int_{\gamma(b,\cdot)} F \cdot \vec{dx} - \int_{\gamma(a,\cdot)} F \cdot \vec{dx} \\ &\quad + \int_0^1 \int_a^b \Big(\big\langle DF \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \big\rangle - \big\langle DF \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \big\rangle \Big)\, ds dt.\end{aligned}$$

Gilt $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ für $i, j = 1, \ldots, n$, und hat die Homotopie feste Endpunkte oder ist geschlossen, so ist die rechte Seite Null.

Beweis: Nach Zusatz zum Satz von Schwarz, Satz 2.2 in Kapitel 6, gilt $\partial_t \partial_s \gamma = \partial_s \partial_t \gamma$. Wir berechnen mit Satz 4.2 und partieller Integration bezüglich $s \in [a,b]$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \int_{\gamma(\cdot,t)} F \cdot \vec{dx} \;&=\; \frac{\partial}{\partial t} \int_a^b \big\langle F(\gamma(s,t), \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s,t) \big\rangle\, ds \\ &=\; \int_a^b \big\langle DF \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \big\rangle\, ds + \int_a^b \big\langle F \circ \gamma, \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial s} \big\rangle\, ds \\ &=\; \int_a^b \big\langle DF \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \big\rangle\, ds + \big\langle F \circ \gamma, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \big\rangle \Big|_{s=a}^{s=b} - \int_a^b \big\langle DF \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \big\rangle\, ds.\end{aligned}$$

Integration bezüglich t ergibt die Formel. Ist $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ oder mit anderen Worten DF symmetrisch, so verschwindet das Doppelintegral. Bei festen Endpunkten sind $\gamma(\cdot, a)$ und $\gamma(\cdot, b)$ konstant, also die zugehörigen Kurvenintegrale Null. Ist die Homotopie geschlossen, so gilt $\gamma(\cdot, a) = \gamma(\cdot, b)$ und die Kurvenintegrale rechts heben sich gegenseitig weg. $\square$

Wir können an dieser Stelle als Anwendung den Fundamentalsatz der Algebra (Kapitel 2, Satz 3.10) beweisen. Es gibt vielleicht einfachere Beweise, aber dieses Argument ist jedenfalls sehr anschaulich.

Satz 1.4 (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes komplexe Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$.*

Beweis: Wir verwenden das Winkelvektorfeld $W : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^2$. Nach Beispiel 1.6 gilt $\partial_1 W_2 = \partial_2 W_1$. Sei $p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{C}$ und $n \geq 1$. Schreibe $p(z) = p_n(z) + q(z)$ mit $p_n(z) = z^n$. Da q höchstens den Grad $n-1$ hat, gilt $z^{-n} q(z) \to 0$ mit $|z| \to \infty$, also für $R > 0$ hinreichend groß

$$|q(Re^{i\theta})| \leq \frac{1}{2} R^n \quad \text{für } \theta \in [0, 2\pi].$$

Betrachte nun die geschlossene Kurve $\gamma_0 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_0(\theta) = p(Re^{i\theta})$, und die Homotopie

$$\gamma : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(\theta, t) = p_n(Re^{i\theta}) + (1-t) q(Re^{i\theta}).$$

Wir berechnen

$$|\gamma(\theta, t)| \geq |p_n(Re^{i\theta})| - |q(Re^{i\theta})| \geq R^n - \frac{1}{2} R^n > 0.$$

Da $\gamma(\theta, 1) = p_n(Re^{i\theta}) = R^n e^{in\theta}$, folgt aus Lemma 1.5 und Beispiel 1.6

$$\int_{\gamma_0} W \cdot \vec{dx} = \int_{\gamma(\cdot,1)} W \cdot \vec{dx} = 2\pi n.$$

Wir betrachten jetzt eine zweite, ebenfalls glatte Homotopie:

$$\tilde{\gamma} : [0, 2\pi] \times [0, R] \to \mathbb{R}^2,\ \tilde{\gamma}(\theta, \varrho) = p(\varrho e^{i\theta}).$$

Es ist $\tilde{\gamma}(\theta, 0) = p(0) = a_0$ eine konstante Abbildung. Hätte p keine Nullstelle in $\mathbb{C}$, so ist auch dies eine geschlossene Homotopie in $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, und es folgt wieder mit Lemma 1.5

$$\int_{\gamma_0} W \cdot \vec{dx} = \int_{\tilde{\gamma}(\cdot,0)} W \cdot \vec{dx} = 0,$$

das heißt $2\pi n = 0$, ein Widerspruch. □

Lemma 1.6 (affine Homotopie) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ für $i, j = 1, \ldots, n$. Für Kurven $\gamma_0, \gamma_1 \in PC^1([a, b], \Omega)$ betrachte die affine Homotopie*

$$\gamma : [a, b] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n,\ \gamma(s, t) = (1-t)\gamma_0(s) + t\gamma_1(s).$$

Haben γ_0, γ_1 gleiche Endpunkte oder sind geschlossen, und gilt $\gamma([a, b] \times [0, 1]) \subset \Omega$, so folgt

$$\int_{\gamma_0} F \cdot \vec{dx} = \int_{\gamma_1} F \cdot \vec{dx}.$$

Beweis: Sind $\gamma_0, \gamma_1 \in C^1([a, b], \Omega)$, so folgt die Aussage direkt aus Lemma 1.5. Für γ_0, γ_1 stückweise C^1 zerlegen wir $[a, b]$ in Teilintervalle, auf denen beide Kurven C^1 sind, und wenden Lemma 1.5 auf den Teilintervallen an. Die Randintegrale heben sich bei Addition heraus. □

Satz 1.5 (Homotopieinvarianz des Kurvenintegrals) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ auf Ω für $1 \leq i, j \leq n$. Sind dann $\gamma_0, \gamma_1 \in PC^1([a, b], \Omega)$ homotop in Ω mit festen Endpunkten (oder geschlossen homotop), so gilt*

$$\int_{\gamma_0} F \cdot \vec{dx} = \int_{\gamma_1} F \cdot \vec{dx}.$$

Beweis: Ist die Homotopie hinreichend glatt, so folgt die Aussage aus Lemma 1.5. Es geht also um das technische Problem, dass die gegebene Homotopie $\gamma \in C^0([a,b] \times [0,1], \Omega)$ eventuell nur stetig ist. Die Lektüre des Beweises könnte zurückgestellt werden.

Aus Kompaktheitsgründen gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_{2\varepsilon}(p) \subset \Omega$ für alle $p \in \gamma([a,b] \times [0,1])$, vgl. Lemma 1.1 in Kapitel 7. Da γ auf der kompakten Menge $[a,b] \times [0,1]$ gleichmäßig stetig ist, gibt es weiter ein $\delta > 0$ mit

$$|\gamma(s_0,t) - \gamma(s_1,t)|,\ |\gamma(s,t_0) - \gamma(s,t_1)| < \varepsilon \quad \text{für } |s_0 - s_1|,\ |t_0 - t_1| < \delta.$$

Wir ersetzen jetzt $\gamma(\cdot,t)$ durch stückweise lineare Kurven. Für $N \in \mathbb{N}$ mit $(b-a)/N < \delta$ und $s_k = a + k(b-a)/N$, $k = 0, 1, \ldots, N$, definieren wir $\tilde{\gamma} : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\tilde{\gamma}(s,t) = \frac{s_k - s}{s_k - s_{k-1}} \gamma(s_{k-1},t) + \frac{s - s_{k-1}}{s_k - s_{k-1}} \gamma(s_k,t) \quad \text{für } s \in [s_{k-1}, s_k].$$

Es gilt $\tilde{\gamma}(a,t) = \gamma(a,t)$, $\tilde{\gamma}(b,t) = \gamma(b,t)$ für alle $t \in [0,1]$. Für $s \in [s_{k-1}, s_k]$ haben wir

$$|\tilde{\gamma}(s,t) - \gamma(s,t)| = \Big| \frac{s_k - s}{s_k - s_{k-1}} \big(\gamma(s_{k-1},t) - \gamma(s,t)\big) + \frac{s - s_{k-1}}{s_k - s_{k-1}} \big(\gamma(s_k,t) - \gamma(s,t)\big) \Big| < \varepsilon.$$

Für $\lambda \in [0,1]$ folgt $\big|\big(1-\lambda)\gamma(s,t) + \lambda\tilde{\gamma}(s,t)\big) - \gamma(s,t)\big| \leq |\tilde{\gamma}(s,t) - \gamma(s,t)| < \varepsilon$, das heißt die affine Homotopie zwischen $\gamma(\cdot,t)$ und $\tilde{\gamma}(\cdot,t)$ liegt in Ω. Insbesondere folgt aus Lemma 1.6

$$\int_{\gamma_0} F \cdot \vec{dx} = \int_{\tilde{\gamma}(\cdot,0)} F \cdot \vec{dx} \quad \text{und} \quad \int_{\gamma_1} F \cdot \vec{dx} = \int_{\tilde{\gamma}(\cdot,1)} F \cdot \vec{dx}. \tag{1.3}$$

Weiter gilt für $|t_0 - t_1| < \delta$ und $s \in [s_{k-1}, s_k]$

$$|\tilde{\gamma}(s,t_0) - \tilde{\gamma}(s,t_1)| = \Big| \frac{s_k - s}{s_k - s_{k-1}} \big(\gamma(s_{k-1},t_0) - \gamma(s_{k-1},t_1)\big) + \frac{s - s_{k-1}}{s_k - s_{k-1}} \big(\gamma(s_k,t_0) - \gamma(s_k,t_1)\big) \Big| < \varepsilon,$$

und es folgt für alle $\lambda \in [0,1]$

$$\big|\big((1-\lambda)\tilde{\gamma}(s,t_0) + \lambda\tilde{\gamma}(s,t_1)\big) - \gamma(s,t_0)\big| \leq \big|\tilde{\gamma}(s,t_1) - \tilde{\gamma}(s,t_0)\big| + \big|\tilde{\gamma}(s,t_0) - \gamma(s,t_0)\big| < 2\varepsilon.$$

Für $1/N < \delta$ folgt mit $t_l = l/N$ für $l = 0, 1, \ldots, N$ aus Lemma 1.6

$$\int_{\tilde{\gamma}(\cdot,t_l)} F \cdot \vec{dx} = \int_{\tilde{\gamma}(\cdot,t_{l-1})} F \cdot \vec{dx} \quad \text{für } l = 1, \ldots, N,$$

und Kombination mit (1.3) beweist den Satz. □

Definition 1.10 *Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt einfach zusammenhängend, wenn jede geschlossene Kurve $\gamma \in C^0([a,b], \Omega)$ in Ω geschlossen homotop zu einer konstanten Kurve ist.*

Beispiel 1.7 Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig, wenn es ein $x_0 \in \Omega$ gibt mit

$$(1-t)x + tx_0 \in \Omega \quad \text{für alle } x \in \Omega,\ t \in [0,1].$$

Eine sternförmige Menge ist einfach zusammenhängend, denn jede geschlossene Kurve $\gamma_0 \in C^0([a,b], \Omega)$ ist homotop zur konstanten Kurve in x_0, nämlich durch die Homotopie

$$\gamma : [a,b] \times [0,1] \to \Omega,\ \gamma(s,t) = (1-t)\gamma_0(s) + tx_0.$$

Satz 1.6 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und einfach zusammenhänged. Dann sind für ein Vektorfeld $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ *für* $i, j = 1, \dots, n$.

(b) F *hat eine Stammfunktion.*

Beweis: Aus (a) folgt mit Satz 1.5 für jeden geschlossenen Weg $\gamma \in PC^1([a,b], \Omega)$

$$\int_\gamma F \cdot \vec{dx} = 0.$$

Hieraus ergibt sich mit Satz 1.2 die Existenz einer Stammfunktion. Die umgekehrte Implikation wurde schon in Satz 1.3 festgestellt. □

Beispiel 1.8 Ein Spezialfall von Satz 1.6 ist das Lemma von Poincaré: ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig und $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ rotationsfrei, so besitzt F eine Stammfunktion φ. Tatsächlich kann diese explizit angegeben werden: Integration längs $\gamma_x(t) = (1-t)x_0 + tx$, $t \in [0,1]$, ergibt

$$\varphi(x) = \int_{\gamma_x} F \cdot \vec{dx} = \int_0^1 \langle F((1-t)x_0 + tx, x - x_0\rangle \, dt.$$

Wir fassen unsere Resultate über Kurvenintegrale in einer kleinen Tabelle zusammen:

F Gradientenfeld	$\overset{\text{Satz 1.2}}{\Longleftrightarrow}$	$\int F \cdot \vec{dx}$ wegunabhängig
$\Downarrow$ Satz 1.3	$\Uparrow$ 1-fach zshg. Satz 1.6 $\Uparrow$	$\Downarrow$
$\partial_i F_j = \partial_j F_i$	$\overset{\text{Satz 1.5}}{\Longleftrightarrow}$	$\int F \cdot \vec{dx}$ homotopieinvariant

Zu begründen ist noch die Implikation von rechts nach links in der unteren Zeile. Ist das Kurvenintegral homotopieinvariant, so ist es auf einer Umgebung $B_\varrho(x) \subset \Omega$ aber wegunabhängig. Also hat das Vektorfeld auf $B_\varrho(x)$ eine Stammfunktion, und es folgt $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ auf $B_\varrho(x)$.

Wir wollen zum Schluss des Abschnitts eine alternative Notation für Kurvenintegrale einführen, die auf lange Sicht das überlegene Konzept ist. Wir brauchen dazu den Raum $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ aller Linearformen auf $\mathbb{R}^n$, mit anderen Worten den Dualraum $(\mathbb{R}^n)^*$.

Definition 1.11 (1-Form) *Eine Abbildung $\alpha : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ heißt Differentialform vom Grad Eins oder kurz 1-Form (oder auch Kovektorfeld) auf Ω.*

Für $f \in C^1(\Omega)$ ist die Ableitung df (die wir in diesem Kontext mit einem kleinen d statt einem großen D schreiben) eine 1-Form, das sogenannte Differential von f:

$$df : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*, \; df(x)v = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) v_j.$$

Speziell bezeichnet man die Differentiale der n Koordinatenfunktionen $x \mapsto x_i$ auf $\mathbb{R}^n$ mit $dx_i : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$. Es gilt also

$$dx_i(x)v = v_i, \qquad \text{insbesondere } dx_i(x)e_j = \delta_{ij}.$$

Da $dx_i(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gleich ist, das heißt die Abbildung $dx_i : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$ ist konstant, wird die Variable x meistens weggelassen und stattdessen ein Punkt geschrieben, also $dx_i(x)v = dx_i \cdot v$. Jede 1-Form auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ hat nun eine eindeutige Darstellung

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i \quad \text{ mit } \alpha_i : \Omega \to \mathbb{R},\ \alpha_i(x) = \alpha(x)e_i.$$

Dies folgt sofort, wenn wir an der Stelle $x \in \Omega$ beide Seiten auf die Basis $e_1, \ldots, e_n$ anwenden. Die $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sind die Koordinatenfunktionen von α. Für das Differential einer Funktion gilt beispielweise

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i.$$

Eine Form $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i$ auf Ω ist von der Klasse C^k, falls $\alpha_i \in C^k(\Omega)$ für $i = 1, \ldots, n$.

Definition 1.12 (Kurvenintegral von 1-Formen) *Sei α eine stetige 1-Form auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Für $\gamma \in PC^1([a,b], \Omega)$ setzen wir*

$$\int_\gamma \alpha = \int_a^b \alpha(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt.$$

Das Standardskalarprodukt erlaubt es, jedem Vektorfeld eine 1-Form bijektiv zuzuordnen, und zwar definiert man für das Vektorfeld $A : \Omega \to \mathbb{R}^n$ die 1-Form $\alpha : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ durch

$$\alpha(x)v = \langle A(x), v\rangle \quad \text{ für } x \in \Omega,\ v \in \mathbb{R}^n.$$

Dann haben A und α die gleichen Koordinatenfunktionen, denn es ist

$$\alpha_i(x) = \alpha(x)e_i = \langle A(x), e_i\rangle = A_i(x);$$

Insbesondere ist die Gleichung $A = \operatorname{grad}\varphi$ äquivalent zu $\alpha = d\varphi$. Etwas abstrakter ergibt sich das auch aus der Charakterisierung des Gradienten in Gleichung (3.5), Kapitel 6:

$$A = \operatorname{grad}\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \langle A(x), v\rangle = d\varphi(x)v \text{ für alle } x \in \Omega,\ v \in \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = d\varphi.$$

Nach Definition von α gilt weiter $\alpha(\gamma(t))\gamma'(t) = \langle A(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$, und damit

$$\int_\gamma \alpha = \int_\gamma A \cdot \vec{dx}.$$

Es wird folgende Terminologie eingeführt.

Definition 1.13 *Eine 1-Form α auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt*

(a) *exakt, wenn es eine Funktion $\varphi \in C^1(\Omega)$ gibt mit $\alpha = d\varphi$,*

(b) *geschlossen, wenn $\alpha \in C^1$ und $\partial_i \alpha_j = \partial_j \alpha_i$ auf Ω für $i, j = 1, \ldots, n$.*

Ist α dem Vektorfeld A zugeordnet, so ist demnach α genau dann exakt, wenn A ein Gradientenfeld ist, und genau dann geschlossen, wenn A rotationsfrei ist. Wir können somit alle unsere Resultate in der Sprache der 1-Formen neu forumulieren:

- genau dann ist α exakt, wenn das Kurvenintegral wegunabhängig ist;
- ist α exakt, so auch geschlossen;
- ist α geschlossen, so ist das Kurvenintegral homotopieinvariant;
- auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet ist jede geschlossene 1-Form exakt.

Der Vorteil der 1-Formen gegenüber den anschaulicheren Vektorfeldern liegt nun im Transformationsverhalten. Seien dazu $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen, und $\phi \in C^1(U,V)$. Ist ω eine 1-Form auf V, so erhalten wir eine 1-Form $\phi^*\omega$ auf U, den pullback von ω unter ϕ, durch die Formel

$$(\phi^*\omega)(x)v = \omega(\phi(x))D\phi(x)v \quad \text{für } x \in U,\ v \in \mathbb{R}^n.$$

Sind dy_i die Koordinatendifferentiale auf $\mathbb{R}^m$, so berechnen wir

$$(\phi^* dy_i)(x)v = dy_i \cdot D\phi(x)v = d\phi_i(x)v$$

beziehungsweise kurz $\phi^* dy_i = d\phi_i$ für $i = 1, \ldots, m$, und allgemeiner

$$\phi^*\omega = \sum_{i=1}^m (\omega_i \circ \phi) d\phi_i \quad \text{mit} \quad d\phi_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} dx_j.$$

Ist $\phi \in C^{k+1}$ und $\omega \in C^k$ für $k \in \mathbb{N}_0$, so ist demnach $\phi^*\omega \in C^k$.

Satz 1.7 (Transformation des Kurvenintegrals) *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $\phi \in C^1(U,V)$. Für eine stetige 1-Form ω auf V und $\gamma \in PC^1([a,b],U)$ gilt*

$$\int_{\phi\circ\gamma} \omega = \int_\gamma \phi^*\omega.$$

Beweis: Aus den Definitionen ergibt sich

$$\int_{\phi\circ\gamma} \omega = \int_a^b \omega\big(\phi(\gamma(t))\big) D\phi(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b (\phi^*\omega)(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_\gamma \phi^*\omega.$$

□

Das Kurvenintegral von Vektorfeldern benutzt wesentlich das Skalarprodukt, was bei der Analyse des Transformationsverhaltens mit berücksichtigt werden müsste. Bei der Umrechnung des Laplaceoperators auf krummlinige Koordinaten wird uns so etwas noch begegnen.