2 Komplexe Analysis

In diesem Abschnitt wollen wir einen kurzen Ausflug in die komplexe Analysis – die sogenannte Funktionentheorie – unternehmen, und zwar wollen wir jetzt komplexe Kurvenintegrale betrachten. Im folgenden sei stets Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

Definition 2.1 *Die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt komplex differenzierbar in $z \in \Omega$ mit Ableitung $f'(z) = c \in \mathbb{C}$, falls gilt:*

$$\lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = c.$$

f heißt komplex differenzierbar oder holomorph auf Ω, wenn f in allen $z \in \Omega$ komplex differenzierbar ist.

Formal ist diese Definition völlig analog zur Definition der Differenzierbarkeit einer Funktion einer reellen Variablen, nur dass eben jetzt der Differenzenquotient in $\mathbb{C}$ statt in $\mathbb{R}$ gebildet wird. Demzufolge gelten auch alle üblichen Differentiationsregeln:

- Differenzierbarkeit in $z \in \Omega$ impliziert Stetigkeit in $z \in \Omega$.
- Linearität der Ableitung: für $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.
- Produktregel: für $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ gilt $(fg)' = f'g + fg'$.
- Quotientenregel: für $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $g \neq 0$ gilt $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
- Kettenregel: für offene $U, V \subset \mathbb{C}$ und $f : U \to V$, $g : V \to \mathbb{C}$ gilt $(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$.

Die Beweise sind weitgehend analog zu den reellen Beweisen und wir wollen aus Zeitgründen darauf verzichten. Wir halten nur fest, dass zum Beispiel Polynome $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ differenzierbar sind mit Ableitung $P'(z) = a_1 + \ldots + n a_n z^{n-1}$. Soweit verläuft die Diskussion der komplexen Differenzierbarkeit also ganz parallel zum reellen Fall.

Vergessen wir die komplexe Multiplikation, so ist $\mathbb{C}$ nichts anderes als der $\mathbb{R}^2$ mit Standardbasis $1 = (1, 0)$ und $i = (0, 1)$. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ist dann eine vektorwertige Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \big(u(x, y), v(x, y)\big)$, wobei

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy) \quad \text{und} \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy).$$

Es stellt sich nun die Frage: in welcher Beziehung stehen die komplexe Differenzierbarkeit von f und die Differenzierbarkeit als reelle, vektorwertige Funktion?

Satz 2.1 (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen) *Für $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *f ist auf Ω komplex differenzierbar.*

(b) *$f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ ist (reell) differenzierbar mit $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$.*

Beweis: Die Multiplikation mit einer komplexen Zahl c ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, genauer gilt für $c = a + ib$ mit einer einfachen Rechnung

$$cz = Cz \quad \text{mit } C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Auf der linken Seite steht dabei das Produkt der komplexen Zahlen c und z, rechts die Anwendung der Matrix $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ auf den Vektor $z \in \mathbb{R}^2$. Ist f in $z \in \Omega$ komplex differenzierbar mit $f'(z) = c$, so folgt mit dieser Wahl von C

$$\frac{f(w) - f(z) - C(w-z)}{|w-z|} = \frac{f(w) - f(z) - c(w-z)}{w-z} \, \frac{w-z}{|w-z|} \to 0,$$

also gilt $Df(z) = C$. Außerdem erhalten wir mit $f = u + iv$ im Punkt z die Gleichungen

$$f' = u_x - iu_y = v_y + iv_x = \frac{1}{2}\big(f_x - if_y\big). \tag{2.4}$$

Sei jetzt umgekehrt f reell differenzierbar in $z = (x, y)$, und die Cauchy-Riemann Gleichungen seien im Punkt z erfüllt. Dann gilt für $a = u_x$ und $b = -u_y$

$$Df(z) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

also folgt mit $c = a + ib$ für $w \to z$

$$\frac{f(w) - f(z) - c(w-z)}{w-z} = \frac{f(w) - f(z) - Df(z)(w-z)}{|w-z|} \, \frac{|w-z|}{w-z} \to 0.$$

□

Die komplexe Differenzierbarkeit ist also stärker als die reelle Differenzierbarkeit der vektorwertigen Funktion, und zwar müssen die partiellen Ableitungen zusätzlich die Gleichungen $u_x = v_y$ sowie $u_y = -v_x$ erfüllen. Wir wollen als nächstes das komplexe Kurvenintegral definieren. Das Riemann-Integral einer $\mathbb{C}$-wertigen Funktion $f = u + iv : I \to \mathbb{C}$ ist wie üblich komponentenweise definiert, das heißt

$$\int_I f = \int_I u + i \int_I v \in \mathbb{C}.$$

Definition 2.2 (komplexes Kurvenintegral) *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in C^0(\Omega, \mathbb{C})$. Für $\gamma \in PC^1([a,b], \Omega)$ definieren wir*

$$\int_\gamma f\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

Im Integral rechts steht das Produkt der komplexen Zahlen $f(\gamma(t))$ und $\gamma'(t)$. Um das Integral in reelle Kurvenintegrale umzuformen, schreiben wir $f = u + iv$ mit $u, v \in C^0(\Omega)$ sowie $\gamma = x + iy$ mit $x, y \in PC^1(I)$ für $I = [a,b]$, und berechnen

$$\int_I (f\circ\gamma)\gamma' = \int_I \big((u+iv)\circ\gamma\big)\,(x' + iy') = \int_I \big((u\circ\gamma)x' - (v\circ\gamma)y'\big) + i\big((u\circ\gamma)y' + (v\circ\gamma)x'\big),$$

das heißt es gilt

$$\int_\gamma f\,dz = \int_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i\int_\gamma (u\,dy + v\,dx). \tag{2.5}$$

Als Merkregel kann man hier $dz = dx + idy$ benutzen, die rechte Seite der Formel ergibt sich dann durch formales Ausmultiplizieren.

Beispiel 2.1 Sei γ der gegen den Uhrzeigersinn durchlaufene Kreis mit Radius $r > 0$ um den Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, das heißt genauer

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\backslash\{0\},\ \gamma(\theta) = z_0 + re^{i\theta}.$$

Es gilt $\gamma'(\theta) = ire^{i\theta}$. Wir berechnen nun für $k \in \mathbb{Z}$

$$\int_\gamma (z - z_0)^k\,dz = \int_0^{2\pi} (re^{i\theta})^k\,ire^{i\theta}\,d\theta = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}, \\ 2\pi i & \text{falls } k = -1. \end{cases}$$

Satz 2.2 (Cauchys Integralsatz) *Die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, sei stetig partiell differenzierbar und holomorph. Ist dann $\gamma \in PC^1(I, \Omega)$ geschlossen homotop zu einer konstanten Kurve, so folgt*

$$\int_\gamma f\,dz = 0.$$

Beweis: Nach Satz 1.5 in diesem Kapitel müssen wir nur prüfen, ob die Differentialformen $u\,dx - v\,dy$ und $u\,dy + v\,dx$ geschlossen sind, das heißt ob gilt

$$u_y = -v_x \quad \text{und} \quad u_x = v_y.$$

Das sind aber genau die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. □

Etwas allgemeiner besagt Satz 1.5, dass das Kurvenintegral von $f(z)\,dz$, f holomorph, den gleichen Wert ergibt für zwei Kurven, die homotop mit festen Endpunkten oder geschlossen hoomotop sind. Tatsächlich kann auf die Stetigkeit der partiellen Ableitungen verzichtet werden, es reicht als Voraussetzung dass f holomorph ist. Diese Verschärfung ist für uns aber nicht relevant.

Definition 2.3 (komplexe Stammfunktion) *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Dann heißt $F : \Omega \to \mathbb{C}$ (komplexe) Stammfunktion von f auf Ω, falls gilt:*

$$F'(z) = f(z) \quad \text{für alle } z \in \Omega.$$

Im Gegensatz zur Situation bei Funktionen einer reellen Variablen, wo bekanntlich jede stetige Funktion eine Stammfunktion besitzt, müssen für die Existenz einer komplexen Stammfunktion wieder Integrabilitätsbedingungen erfüllt sein.

Folgerung 2.1 (Existenz komplexer Stammfunktionen) *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend. Für $f \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$, $f = u + iv$, sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *f besitzt auf Ω eine komplexe Stammfunktion.*

(b) *f ist komplex differenzierbar auf Ω.*

BEWEIS: Sei $F = U + iV$ Stammfunktion von f, also $u + iv = U_x - iU_y = V_y + iV_x$ nach (2.4). Es folgt $U, V \in C^2(\Omega)$ und

$$u_x - v_y = V_{yx} - V_{xy} = 0 \quad \text{und} \quad u_y + v_x = U_{xy} - U_{yx} = 0.$$

Gelten umgekehrt die Cauchy-Riemann Gleichungen für f, so sind die 1-Formen $u\,dx - v\,dy$ sowie $u\,dy + v\,dx$ geschlossen, besitzen also Stammfunktionen $U, V : \Omega \to \mathbb{R}$ nach Satz 1.6. Für U, V verifiziert man leicht die Cauchy-Riemann Gleichungen, also ist $F = U + iV$ komplex differenzierbar und mit (2.4) erhalten wir $F' = f$. □

Im folgenden schreiben wir $D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$, und setzen

$$\int_{\partial D_r(z_0)} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz, \qquad \text{für } \gamma : [0, 2\pi] \to \partial D_r(z_0),\ \gamma(t) = z_0 + re^{it}.$$

Bekanntlich hängt das Integral nicht von der Wahl der Parametrisierung von $\partial D_r(z_0)$ ab, solange der Kreis im positiven Sinn (also gegen den Uhrzeigersinn) durchlaufen wird. Der folgende Satz besagt unter anderem, dass eine holomorphe Funktion auf einer Kreisscheibe schon durch ihre Werte auf dem Rand der Kreisscheibe bestimmt ist. Für reell differenzierbare Funktionen ist das keineswegs so, zum Beispiel gibt es (viele) Funktionen $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\eta(x) = 0$ für $|x| \geq 1$.

Satz 2.3 (Cauchy Integralformel) *Sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$ holomorph und $\overline{D_r(z_0)} \subset \Omega$. Dann gilt für alle $z \in D_r(z_0)$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

BEWEIS: In $\Omega \backslash \{z\}$ ist der Kreis $\partial D_r(z_0)$ homotop zu $\partial D_\varepsilon(z)$, jeweils mit der mathematisch positiven Orientierung, falls $0 < \varepsilon < r - |z - z_0|$. Die Konstruktion der Homotopie sei den LeserInnen überlassen. Nun ist die Funktion $\zeta \mapsto f(\zeta)/(\zeta - z)$ auf $\Omega \backslash z$ komplex differenzierbar nach der Quotientenregel, und damit das Kurvenintegral homotopieinvariant nach (der nachfolgenden Bemerkung zu) Satz 2.2 Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\
(\zeta = z + \varepsilon e^{it}) \quad &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}}\, i\varepsilon e^{it}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{it})\,dt.
\end{aligned}$$

Da f im Punkt z stetig ist, geht die rechte Seite gegen $f(z)$ mit $\varepsilon \to 0$. □

Satz 2.4 (holomorph = analytisch) *Sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$ komplex differenzierbar und $\overline{D_r(z_0)} \subset \Omega$. Dann gilt für alle $z \in D_r(z_0)$ die Potenzreihenentwicklung*

$$f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k (z - z_0)^k \quad \textit{mit } a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\, d\zeta.$$

Insbesondere ist f auf Ω unendlich oft komplex differenzierbar.

BEWEIS: Aus der Cauchyschen Integralformel, Satz 2.3, erhalten wir durch Entwicklung des Integranden in eine geometrische Reihe für $z \in D_r(z_0)$ die Darstellung

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}} \, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \Big)^k \, d\zeta.$$

Aus der Linearität des Kurvenintegrals folgt mit der Definition der a_k

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \Big)^k \, d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n} (z - z_0)^k \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, d\zeta \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k. \end{aligned}$$

Das komplexe Kurvenintegral ist wie in Lemma 1.3 abgeschätzt durch Länge der Kurve mal Supremum des Integranden. Es folgt mit $M = \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|$ für $|z - z_0| < r$

$$\begin{aligned} \Big| f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k \Big| &= \Big| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{k=n+1}^{\infty} \Big(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \Big)^k \, d\zeta \Big| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \, 2\pi r \, \frac{M}{r} \sum_{k=n+1}^{\infty} \Big(\frac{|z - z_0|}{r} \Big)^k \\ &= \frac{M}{1 - \frac{|z - z_0|}{r}} \Big(\frac{|z - z_0|}{r} \Big)^{n+1} \to 0 \quad \text{mit } n \to \infty. \end{aligned}$$

Damit ist die Potenzreihendarstellung bewiesen.

Sei nun allgemein $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ eine auf $D_r(z_0)$ konvergente Potenzreihe. Die Polynome $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k$ sind komplex differenzierbar, also gilt auf $D_r(z_0)$ nach Satz 2.1

$$Df_n = \begin{pmatrix} c_n & -d_n \\ d_n & c_n \end{pmatrix} \qquad \text{wobei } c_n + i d_n = f_n' = \sum_{k=1}^{n} k a_k (z - z_0)^{k-1}.$$

Die gliedweise differenzierte Potenzreihe $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-1}$ konvergiert aber ebenfalls lokal gleichmäßig auf $D_r(z_0)$, siehe Lemma 3.1 in Kapitel 5. Da partielle Ableitungen eindimensionale Ableitungen sind, können wir die bekannte Vertauschbarkeit von Konvergenz und Ableitung, Satz 3.2 in Kapitel 5, hier anwenden und erhalten mit $n \to \infty$ auf $D_r(z_0)$

$$Df = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \qquad \text{wobei } c + id = g.$$

Nach Satz 2.1 ist f also komplex differenzierbar mit $f' = g$. Durch Induktion ergibt sich, dass f auf $D_r(z_0)$ unendlich oft komplex differenzierbar ist. □

Wir sehen jetzt noch deutlicher, dass komplexe Differenzierbarkeit eine viel stärkere Bedingung darstellt als reelle Differenzierbarkeit. Die Existenz von Potenzreihendarstellungen ist sehr einschneidend, zum Beispiel ist eine holomorphe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$, deren Nullstellenmenge einen Häufungspunkt in Ω hat, automatisch die Nullfunktion. Dies folgt jetzt aus dem Identitätssatz für Potenzreihen, siehe Satz 4.11 in Kapitel 2. Für reell differenzierbare Funktionen ist eine solche Aussage keineswegs wahr. Aus Zeitgründen müssen wir den Ausflug in die Funktionentheorie nun leider beenden.