Kapitel 9

Lokale Auflösung von Gleichungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Wir interessieren uns für die Lösbarkeit einer nichtlinearen Gleichung $f(x) = y$ zu gegebener rechter Seite $y \in \mathbb{R}^m$. Genauer wollen wir die lokale Lösbarkeit betrachten, das heißt wir setzen voraus, dass eine Lösung der Gleichung $f(x_0) = y_0$ gegeben ist, und stellen uns die folgenden Fragen:

(1) Hat die Gleichung $f(x) = y$ zu jedem y nahe bei y_0 eine Lösung x nahe bei x_0?

(2) Ist x_0 die einzige Lösung von $f(x) = y_0$ in einer Umgebung von x_0?

(3) Falls nicht, wie sieht die Lösungsmenge $f^{-1}\{y_0\}$ nahe bei x_0 aus?

Betrachten wir zunächst den Fall, dass f affin-linear ist. Wegen $f(x_0) = y_0$ hat f dann die Form $f(x) = y_0 + A(x - x_0)$ mit $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ und es gilt

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad A(x - x_0) = y - y_0.$$

In diesem Fall liefert die Lineare Algebra sogar globale Antworten:

(1) Es gibt eine Lösung für alle $y \in \mathbb{R}^m \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rang} A = m$.

(2) Es gibt höchstens eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad \ker A = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rang} A = n$.

(3) $f^{-1}\{y_0\} = x_0 + \ker A$ ist ein affiner Unterraum der Dimension $n - \operatorname{rang} A$.

Sei nun $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ beliebig, und $R_f(\xi) = f(x_0 + \xi) - \big(f(x_0) + Df(x_0)\xi\big)$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$ hinreichend klein. Ist $f(x_0) = y_0$, so folgt mit $A = Df(x_0)$

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad A(x - x_0) + R_f(x - x_0) = y - y_0.$$

Wir hoffen, dass sich der nichtlineare Term $R_f(x - x_0)$ als Störung der linearen Gleichung behandeln lässt, so dass sich die Aussagen (1), (2) und (3) geeignet übertragen lassen.

1 Diffeomorphismen

Definition 1.1 *Eine Abbildung $f : U \to V$ zwischen offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ heißt Diffeomorphismus der Klasse C^r, wobei $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, falls f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} sind r-mal stetig differenzierbar.*

Beispiel 1.1 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Ist $f \in C^1(I)$ mit $f' > 0$ auf ganz I (bzw. $f' < 0$ auf ganz I), so ist $J := f(I)$ ein offenes Intervall und $f : I \to J$ ein C^1-Diffeomorphismus. Dies ergibt sich aus Folgendem:

- $f : I \to J$ ist bijektiv, da streng monoton wachsend. Nach dem Zwischenwertsatz, genauer Satz 2.2 in Kapitel 3, ist J wieder ein offenes Intervall.
- Die Umkehrabbildung $g = f^{-1}$ ist differenzierbar mit $g' = 1/(f' \circ g)$, insbesondere ist g von der Klasse C^1, vgl. Kapitel 4, Satz 1.6.

Umgekehrt: ist $f : I \to f(I)$ ein C^1-Diffeomorphismus mit Umkehrabbildung $g : f(I) \to I$, so ergibt die Kettenregel

$$g(f(x)) = x \quad \Rightarrow \quad g'(f(x))f'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) \neq 0.$$

Nach dem Zwischenwertsatz gilt entweder $f' > 0$ auf ganz I oder $f' < 0$ auf ganz I. Insbesondere ist f streng monoton.

Zum Beispiel ist die Abbildung $f : (-1,1) \to (-1,1)$, $f(x) = x^3$, zwar bijektiv, genauer streng monoton wachsend, und von der Klasse C^1, aber sie ist kein C^1-Diffeomorphismus, denn es gilt $f'(0) = 0$. Die Umkehrabbildung

$$g : (-1,1) \to (-1,1),\ g(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y} & \text{für } y \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-y} & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

ist im Punkt $y = 0$ nicht differenzierbar.

Beispiel 1.2 Sei $U = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi\}$ und $V = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,0) : x \geq 0\}$. Die Polarkoordinatenabbildung

$$f : U \to V,\ f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta),$$

ist ein Diffeomorphismus der Klasse C^∞. Prüfen Sie nach, dass die Umkehrabbildung $g : V \to U$ wie folgt gegeben ist:

$$g(x,y) = \begin{cases} \big(\sqrt{x^2+y^2},\ \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\big) & \text{für } y \geq 0 \\ \big(\sqrt{x^2+y^2},\ 2\pi - \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\big) & \text{für } y < 0. \end{cases}$$

Die Funktion arccos ist unendlich oft differenzierbar auf dem Intervall $(-1,1)$, also ist g unendlich oft differenzierbar für $y \in V$, $y \neq 0$. Aber für $x < 0$ gilt alternativ die Formel

$$g(x,y) = \big(\sqrt{x^2+y^2},\ \frac{\pi}{2} + \arccos\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\big).$$

Somit ist in der Tat $g \in C^\infty(V,U)$.

Beispiel 1.3 (Inversion) Die Inversion an der Standardsphäre $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ ist der Diffeomorphismus

$$f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \quad f(x) = \frac{x}{|x|^2}.$$

Die Abbildung $f = f^{-1}$ ist von der Klasse C^∞. Die beschränkte Menge $U = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |x| < 1\}$ wird auf die unbeschränkte Menge $V = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| > 1\}$ abgebildet.

Lemma 1.1 (Ableitung der Umkehrfunktion) *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen und $f : U \to V$ sei bijektiv mit Umkehrabbildung $g : V \to U$. Sind f in x_0 und g in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar, so ist $Df(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ invertierbar, insbesondere $m = n$, und es gilt $Dg(y_0) = Df(x_0)^{-1}$.*

Beweis: Aus $g\big(f(x)\big) = x$ und $f\big(g(y)\big) = y$ folgt mit der Kettenregel

$$Dg(y_0)Df(x_0) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \quad Df(x_0)Dg(y_0) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^m}.$$

Also ist $Df(x_0)$ injektiv und surjektiv, das heißt invertierbar, und die Dimensionsformel impliziert $m = n$. $\square$

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen. Theoretisch hätten wir in unserer Definition 1.1 eines Diffeomorphismus $f : U \to V$ die Möglichkeit $m \neq n$ zulassen können. Lemma 1.1 zeigt, dass dies nichts gebracht hätte, denn es gilt automatisch $n = m$; man spricht von der Invarianz der Dimension unter Diffeomorphismen. Eine Bijektion $f : U \to V$ heißt Homeomorphismus, wenn f und f^{-1} beide stetig sind. Nach einem Satz von Brouwer (1910) gilt die Invarianz der Dimension, also $m = n$, schon für Homeomorphismen. Dies ist auf dem Hintergrund eines Beispiels von Peano (1890) zu sehen, der surjektive, stetige Abbildungen von einem Intervall auf die Fläche eines Quadrats konstruiert hat. Der Satz von Brouwer wird mit dem Konzept des Abbildungsgrads bewiesen, das in der algebraischen Topologie oder der nichtlinearen Funktionalanalysis eingeführt wird.

Bekanntlich heißt $\det Df(x_0)$ Jacobideterminante von f in x_0. In der Situation von Lemma 1.1 folgt aus dem Determinantenmultiplikationssatz

$$\det Dg(y_0)\, \det Df(x_0) = 1 \quad \text{für } y_0 = f(x_0). \tag{1.1}$$

Lemma 1.2 (Höhere Ableitungen der Umkehrfunktion) *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to V$ bijektiv. Ist $f \in C^r(U, V)$ für ein $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und ist die Umkehrabbildung $g : V \to U$ differenzierbar, so ist auch $g \in C^r(V, U)$.*

Beweis: Nach Lemma 1.1 gilt $Dg = (Df)^{-1} \circ g$. Die Cramersche Regel für die Berechnung der inversen Matrix impliziert

$$\frac{\partial g_j}{\partial y_i} = (-1)^{i+j} \frac{M_{ij}\,(Df)}{\det(Df)} \circ g. \tag{1.2}$$

Dabei bezeichnet $M_{ij}(Df)$ die Determinante der Matrix, die aus Df durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über $r \in \mathbb{N}$. Da g nach Voraussetzung differenzierbar und somit stetig ist, vgl. Satz 3.2 in Kapitel 6, ist für $f \in C^1$ die rechte Seite in (1.2) stetig als Produkt, Quotient und Verkettung stetiger Funktionen, und damit $g \in C^1$. Ist $f \in C^r$ und induktiv schon $g \in C^{r-1}$, so ist die rechte Seite von der Klasse C^{r-1} als Produkt, Quotient und Verkettung von C^{r-1}-Funktionen, siehe Folgerung 3.1 in Kapitel 6, und damit $g \in C^r$, was zu zeigen war. $\square$

Nach diesen Vorüberlegungen wollen wir nun die Frage der Existenz einer Lösung angehen. Dazu die folgenden Definitionen.

Definition 1.2 *Eine Folge x_k, $k \in \mathbb{N}$, in einem metrischen Raum (X, d) heißt Cauchyfolge, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{R}$ gibt mit*

$$d(x_k, x_l) < \varepsilon \quad \text{für alle } k, l > N.$$

Ein metrischer Raum heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge x_k in X konvergiert, das heißt es gibt ein $x \in X$ mit $d(x, x_k) \to 0$ mit $k \to \infty$.

Natürlich ist $\mathbb{R}^n$ mit der Euklidischen Abstandsfunktion ein vollständiger metrischer Raum. Aber jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist mit dem euklidischen Abstand auch ein vollständiger metrischer Raum, denn eine Cauchyfolge $x_k \in A$ ist auch Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$ und konvergiert damit gegen ein $x \in \mathbb{R}^n$, und es gilt $x \in A$ wegen A abgeschlossen.

Satz 1.1 (Fixpunktsatz von Banach) *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, und $F : X \to X$ eine Kontraktion, das heißt es gibt ein $\theta \in [0, 1)$ mit*

$$d(F(x), F(y)) \leq \theta\, d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X. \tag{1.3}$$

Dann gibt es genau ein $x \in X$ mit $F(x) = x$.

Beweis: Die Eindeutigkeit ist klar, denn aus $F(x) = x$ und $F(y) = y$ folgt

$$d(x, y) = d(F(x), F(y)) \leq \theta\, d(x, y) \quad \Rightarrow \quad d(x, y) = 0, \text{ also } x = y.$$

Um den Fixpunkt zu konstruieren, betrachten wir die rekursiv definierte Folge $x_{n+1} = F(x_n)$ mit beliebigem Startwert $x_0 \in X$. Es folgt aus (1.3) für $n \geq 1$

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(F(x_n), F(x_{n-1})) \leq \theta\, d(x_n, x_{n-1}). \tag{1.4}$$

Wir können uns einen müder werdenden Frosch vorstellen, dessen Sprünge jedes Mal um ein Faktor $\theta \in [0, 1)$ kürzer werden. Wie weit kann der Frosch insgesamt kommen? Es folgt per Induktion aus (1.4)

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \theta^n\, d(x_1, x_0) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.5}$$

und hieraus weiter mit der Dreiecksungleichung

$$d(x_n, x_0) \leq \sum_{j=0}^{n-1} d(x_{j+1}, x_j) \leq \sum_{j=0}^{n-1} \theta^j\, d(x_1, x_0) \leq \frac{1}{1-\theta}\, d(x_1, x_0).$$

Indem wir x_n statt x_0 als Startwert auffassen, haben wir für $m > n$

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{1}{1-\theta}\, d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{\theta^n}{1-\theta}\, d(x_1, x_0). \tag{1.6}$$

Also ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Cauchyfolge, und konvergiert nach Voraussetzung gegen ein $x \in X$. Da F nach Voraussetzung Lipschitzstetig ist (mit Konstante θ), folgt

$$F(x) = \lim_{n \to \infty} F(x_n) = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = x,$$

und die Existenz des Fixpunkts ist gezeigt. □

Wir bemerken, dass wir a priori abschätzen können, wie weit die Iteration im n-ten Schritt noch vom gesuchten Fixpunkt entfernt ist, und zwar folgt mit $m \to \infty$ aus (1.6)

$$d(x, x_n) \leq \frac{\theta^n}{1-\theta}\, d(x_1, x_0).$$

Satz 1.2 (über inverse Funktionen) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Ist $Df(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ invertierbar, so gibt es eine offene Umgebung U von x_0, so dass gilt:*

(a) *$V = f(U)$ ist offene Umgebung von $y_0 = f(x_0)$*

(b) *$f : U \to V$ ist Diffeomorphismus der Klasse C^1.*

Zusatz. Ist $f \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^n)$ für ein $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so ist $g = (f|_U)^{-1} \in C^r(V, \mathbb{R}^n)$.

BEWEIS: Wir können $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$ annehmen, andernfalls betrachten wir die Abbildung

$$\tilde{f} : \tilde{\Omega} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : x_0 + \xi \in \Omega\} \to \mathbb{R}^n,\ \tilde{f}(\xi) = f(x_0 + \xi) - f(x_0).$$

Schritt 1 *Formulierung als Fixpunktproblem*
Mit $A := Df(0)$ und $R_f(x) := f(x) - Ax$ können wir die Gleichung wie folgt umformen:

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad Ax + R_f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = A^{-1}\big(y - R_f(x)\big).$$

Für $y \in \mathbb{R}^n$ definieren wir also $\phi_y : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\phi_y(x) = A^{-1}\big(y - R_f(x)\big)$, und erhalten

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \phi_y(x) = x. \tag{1.7}$$

Schritt 2 *Konstruktion der Lösung*
Wir bestimmen $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$, so dass für jedes $y \in B_\varepsilon(0)$ die Abbildung $\phi_y : \overline{B_\delta(0)} \to \overline{B_\delta(0)}$ eine Kontraktion ist. Setze $\Lambda = \|A^{-1}\| \in (0, \infty)$. Nach Voraussetzung ist $DR_f(x) = Df(x) - A$ stetig mit $DR_f(0) = 0$, folglich gibt es ein $\delta_0 > 0$ mit

$$\overline{B_{\delta_0}(0)} \subset \Omega \quad \text{und} \quad \|DR_f(x)\| \le \frac{1}{2\Lambda} \quad \text{für } |x| \le \delta_0.$$

Aus dem Schrankensatz, siehe Satz 1.2 in Kapitel 7, folgt

$$|x_1|, |x_2| \le \delta_0 \quad \Rightarrow \quad |R_f(x_1) - R_f(x_2)| \le \frac{1}{2\Lambda}\, |x_1 - x_2|. \tag{1.8}$$

Wir berechnen nun

$$\begin{aligned} |\phi_y(x_1) - \phi_y(x_2)| &= \big|A^{-1}\big(y - R_f(x_1)\big) - A^{-1}\big(y - R_f(x_2)\big)\big| \\ &= \big|A^{-1}\big(R_f(x_1) - R_f(x_2)\big)\big| \\ &\le \Lambda\, |R_f(x_1) - R_f(x_2)|. \end{aligned}$$

Also folgt aus (1.8) die Kontraktionseigenschaft

$$|x_1|, |x_2| \le \delta_0 \quad \Rightarrow \quad |\phi_y(x_1) - \phi_y(x_2)| \le \frac{1}{2}\, |x_1 - x_2|. \tag{1.9}$$

Bisher ist $y \in \mathbb{R}^n$ noch beliebig. Wir schätzen weiter ab

$$\begin{aligned} |\phi_y(x)| &= \big|A^{-1}\big(y - R_f(x)\big)\big| \\ &\le \|A^{-1}\|\, \big(|y| + |R_f(x)|\big) \\ &= \Lambda\big(|y| + |R_f(x) - R_f(0)|\big) \quad \big(\text{ da } R_f(0) = 0\big) \\ &\le \Lambda|y| + \frac{1}{2}|x| \quad \text{für } |x| \le \delta_0 \text{ nach (1.8)}. \end{aligned}$$

Also folgt für $\delta \in (0, \delta_0]$, wenn wir $\varepsilon = \delta/(2\Lambda) > 0$ wählen,

$$(1.10) \qquad |x| \leq \delta,\ |y| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |\phi_y(x)| < \Lambda\varepsilon + \frac{1}{2}\delta = \delta.$$

Wegen (1.10) und (1.9) ist $\phi_y : \overline{B_\delta(0)} \to \overline{B_\delta(0)}$ eine wohldefinierte Kontraktion mit Konstante $\theta = 1/2$. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es zu jedem $y \in B_\varepsilon(0)$ genau ein $x \in \overline{B_\delta(0)}$ mit $\phi_y(x) = x$, das heißt $f(x) = y$ nach (1.7). Tatsächlich ist $x \in B_\delta(0)$, denn nach (1.10) gilt $|x| = |\phi_y(x)| < \delta$. Die Mengen $V = B_\varepsilon(0)$ und $U = f^{-1}(V) \cap B_\delta(0)$ sind offene Umgebungen des Nullpunkts, siehe Satz 1.4 in Kapitel 6 für die Offenheit von U, und wie gezeigt ist $f : U \to V$ bijektiv. Insbesondere ist Behauptung (a) bewiesen.

Schritt 3 *Differenzierbarkeit der inversen Abbildung*
Sei $g : V \to U$ die Umkehrabbildung von $f : U \to V$. Dann gilt

$$(1.11) \qquad |g(y)| = |\phi_y(g(y))| \leq \Lambda|y| + \frac{1}{2}\,|g(y)| \quad \Rightarrow \quad |g(y)| \leq 2\Lambda|y|.$$

Insbesondere ist g stetig im Nullpunkt mit $g(0) = 0$. Wir zeigen nun $Dg(0) = A^{-1}$. Für $y \neq 0$ ist $g(y) \neq 0$ und es gilt die Abschätzung

$$\frac{|g(y) - A^{-1}\,y|}{|y|} = \frac{|\phi_y\big(g(y)\big) - A^{-1}y|}{|y|} = \frac{\big|A^{-1}\big(R_f\big(g(y)\big)\big)\big|}{|y|} \leq \Lambda\,\frac{\big|R_f\big(g(y)\big)\big|}{|g(y)|}\,\frac{|g(y)|}{|y|}.$$

Mit $y \to 0$ geht die rechte Seite aber gegen Null, denn $|g(y)|/|y| \leq 2\Lambda$ nach (1.11) und $|R_f(x)|/|x| \to 0$ mit $x = g(y) \to 0$. Damit ist ist $Dg(0) = A^{-1}$ gezeigt. Um die Differenzierbarkeit für alle $y \in V$ zu bekommen, wählen wir $\delta > 0$ so klein, dass $\det Df(x) \neq 0$ für alle $x \in B_\delta(0)$. Ist dann $y \in V$, so sind die Voraussetzungen des Satzes im Punkt $x = g(y)$ erfüllt, und es folgt aus dem Bewiesenen $Dg(y) = Df(x)^{-1}$.

Lemma 1.2 liefert schließlich $g \in C^1(V, U)$. Ist $f \in C^r(U, V)$ für ein $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so ist $g \in C^r(V, U)$, ebenfalls nach Lemma 1.2. □

Als unmittelbare Konsequenz des Satzes halten wir fest:

Folgerung 1.1 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Ist $Df(x)$ invertierbar für alle $x \in \Omega$, so ist $f(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ offen.*

Beweis: Nach Satz 1.2 hat jeder Punkt $y \in f(\Omega)$ eine offene Umgebung $V \subset f(\Omega)$. □

Beispiel 1.4 Wie wir in Beispiel 1.1 gesehen haben, bildet eine eindimensionale Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit $f' \neq 0$ das gesamte Definitionsintervall diffeomorph auf das Bildintervall ab, das heißt es gilt eine globale Version des Umkehrsatzes. Das folgende Beispiel zeigt, dass eine entsprechende Aussage für Funktionen mehrerer Variabler im allgemeinen nicht wahr ist. In reellen Koordinaten $z = x + iy$ lautet die komplexe Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \exp(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

Es gilt $\exp(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$. Die Jacobideterminante von exp ist nirgends Null, genauer gilt

$$D\exp(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det D\exp(x, y) = e^{2x} \neq 0.$$

Die Abbildung ist jedoch nicht injektiv, denn es ist $\exp(x, y + 2k\pi) = \exp(x, y)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Wir diskutieren jetzt ein Beispiel, das unter anderem beim Übergang von der Lagrangefunktion zur Hamiltonfunktion in der klassischen Mechanik auftritt. Für eine differenzierbare Funktion $L : U \to \mathbb{R}$ definiert man die zugehörige Gradientenabbildung durch

$$f : U \to V,\ f(x) = DL(x) \quad \text{wobei } V = f(U) \subset \mathbb{R}^n.$$

Ist $f : U \to V$ injektiv und $g : V \to U$ die Umkehrfunktion von f, so können wir die Legendretransformierte oder duale Funktion von L wie folgt erklären:

$$H : V \to \mathbb{R},\ H(y) = \Big(\sum_{i=1}^n y_i x_i - L(x)\Big)|_{x=g(y)}.$$

Für $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $L(x) = \sqrt{1+|x|^2}$ berechnet man zum Beispiel $V = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < 1\}$ und

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+|x|^2}} \quad g(y) = \frac{y}{\sqrt{1-|y|^2}} \quad \text{sowie}$$

$$H(y) = \Big(\sum_{i=1}^n y_i x_i - \sqrt{1+|x|^2}\Big)|_{x=g(y)} = \sqrt{1-|y|^2}.$$

Satz 1.3 (Involutionseigenschaft der Legendretransformation) *Sei für $L \in C^2(U)$ die Gradientenabbildung $f : U \to V$, $f(x) = DL(x)$, diffeomorph, und sei H die Legendretransformierte von L. Dann folgt $DH = g$ mit $g = f^{-1} \in C^1(V,U)$, insbesondere $H \in C^2(V)$, und die Legendretransformierte von H ist wieder L:*

$$L(x) = \Big(\sum_{i=1}^n y_i x_i - H(y)\Big)|_{y=f(x)} \quad \textit{für alle } x \in U.$$

Beweis: Wir berechnen unter Verwendung von $\frac{\partial L}{\partial x_i}(g(y)) = f_i(g(y)) = y_i$

$$\frac{\partial H}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_j}\Big(\sum_{i=1}^n y_i g_i(y) - L \circ g\Big) = g_j + \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial g_i}{\partial y_j} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_i} \circ g \, \frac{\partial g_i}{\partial y_j} = g_j,$$

also gilt $DH = g$. Die Darstellung von L folgt mit $y = f(x)$ in der Definition von H. □

Geometrisch gelangen wir zu der Legendretransformation, wenn wir für den Graph einer Funktion L die Schar $\{E_x : x \in U\}$ der affinen Tangentialebenen betrachten:

$$E_x = \{(\xi, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : z = L(x) + DL(x)(\xi - x)\} \quad \text{für } x \in U.$$

Wir wollen diese Schar durch die Steigungen $y = DL(x)$ parametrisieren; natürlich muss dazu die Gradientenabbildung injektiv sein. Die Legendretransformierte $H : V \to \mathbb{R}$ von L ist dann definiert, und es folgt

$$E_x = \{(\xi, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : z = \sum_{i=1}^n y_i \xi_i - H(y)\} \quad \text{für } y = DL(x).$$

Umgekehrt kann das Problem betrachtet werden, zu einer gegebenen Ebenenschar $E_y = \{(\xi, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : z = \sum_{i=1}^n y_i \xi_i - H(y)\}$ einen Graphen $L : U \to \mathbb{R}$ zu bestimmen, dessen affine Tangentialebenen gerade die E_y sind. Es muss dann H die Legendretransformierte der gesuchten Funktion L sein, und unter den Annahmen von Satz 1.3 kann L wiederum durch Legendretransformation von H bestimmt werden.

Satz 1.4 (Youngsche Ungleichung) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $L \in C^2(U)$ mit $D^2L(x) > 0$ für alle $x \in U$. Dann ist die Legendretransformierte $H \in C^2(V)$ definiert, wobei $V = DL(U)$, und es gilt*

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq L(x) + H(y) \quad \text{für alle } x \in U,\ y \in V.$$

Gleichheit tritt ein genau für $y = DL(x)$ beziehungsweise äquivalent $x = DH(y)$.

Beweis: Die Gradientenabbildung $f \in C^1(U, V)$, $f(x) = DL(x)$, ist injektiv, denn wegen $Df(x) = D^2L(x) > 0$ folgt für $x_0, x_1 \in U$ mit $x_0 \neq x_1$

$$\langle f(x_1) - f(x_0), x_1 - x_0 \rangle = \int_0^1 \langle Df((1-t)x_1 + tx_0)(x_1 - x_0), x_1 - x_0 \rangle \, dt > 0.$$

Da außerdem $Df(x)$ invertierbar ist für alle $x \in U$, ist f ein C^1-Diffeomorphismus nach dem Umkehrsatz. Betrachte nun für festes $y \in V$ die Funktion $\varphi \in C^2(U)$ mit

$$\varphi(x) = L(x) + H(y) - \sum_{i=1}^n y_i x_i.$$

Dann gilt $\varphi(g(y)) = 0$ nach Definition von H sowie $D\varphi(g(y)) = DL(g(y)) - y = 0$ nach Definition von $g = f^{-1}$, und $D^2\varphi(x) = D^2L(x) > 0$ für alle $x \in U$. Damit folgt die Behauptung aus Satz 2.4 in Kapitel 7. $\square$

Folgerung 1.2 *Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Es gilt*

$$\langle x, y \rangle \leq \frac{1}{p}|x|^p + \frac{1}{q}|y|^q, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

(Übung)

Aus dem Satz folgt für die Legendretransformierte die Darstellung

$$H(y) = \inf_{x \in U} \big(\sum_{i=1}^n y_i x_i - L(x) \big).$$

Mit dieser Formel kann die Legendretransformierte auch dann definiert werden, wenn L nicht differenzierbar, sondern lediglich konvex ist.