Analysis I

Guofang Wang

Universität Freiburg

18.10.2016

Inhaltsverzeichnis

Mengen

Georg Cantor

Eine Menge ist die ungeordnete Zusammenfassung verschiedener Elemente zu einem Ganzen.

Bezeichnung. Ist M eine solche Menge, so führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$$a \in M$$

heißt: "a ist Element von M" (oder: "a gehört zu M", "a liegt in M", "a ist aus M").

$$a \notin M$$

heißt: "a ist nicht Element von M".

Mengen

$$M = \{a, b, \cdots\}$$

heißt: "M ist die Menge, die aus den Elementen a, b usw. besteht".

$$M = \{a : a \text{ hat die Eigenschft } E\}$$

heißt: "M ist die Menge aller Elementen a, die die Eigenschaft E haben, und nur diese Elemente ligen in M."

Beispiel

i) *Für* $a \neq b$ *gilt* $M = \{a, b\} = \{b, a\} = \{a, b, a\}$.

ii) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$ *(Menge der natürlichen Zahlen)*

iii) $\emptyset = \{\}$ *(leere Menge).*

iv) $\{n \in \mathbb{N} \,|\, n \textit{ teilt } 15\} = \{1, 3, 5, 15\}$.

Quantoren:

"$\forall$": "für alle"
z.B. $\forall n \in \mathbb{N} : (n+1)^2 > n+1.$

"$\exists$": "es gibt"
z.B. $\forall n \in \mathbb{N} \, \exists k \in \mathbb{N} : k > n.$

"$:=$": "gilt per Definition", oder "ist definiert als".
z.B. $M := \{1, 2, 3\}.$

"$(A) \Rightarrow (B)$": "Aus der Aussage (A) folgt die Aussage (B)."
z.B. $n > 5 \Rightarrow n^2 > 20.$

"$(A) \Leftrightarrow (B)$": "(A) und (B) sind äquivalent."

Teilmenge

Seien M, N zwei Mengen. M heißt in N enthalten, in Zeichen:

$$M \subset N,$$

wenn gilt:

ist $x \in M$, so auch $x \in N$.

Man nennt M dann auch Teilmenge von N.
Zwei Menge M, N sind genau dann gleich, wenn

$$M \subset N \text{ und } N \subset M.$$

Also:

$$M = N \Leftrightarrow M \subset N \text{ und } N \subset M$$

Dies ist auch eine Methode, um $M = N$ zu zeigen.

Verknüpfungen

Definition 0.1 (Verknüpfungen)

Seien M, N beliebige Mengen:

- Vereinigung: $M \cup N := \{x \,|\, x \in M \text{ oder } x \in N\}$.
- Durchschnitt: $M \cap N := \{x \,|\, x \in M \text{ und } x \in N\}$.
- Differenz: $M \backslash N := \{x \,|\, x \in M, x \notin N\}$
- Produktmenge: $M \times N := \{(x, y) \,|\, x \in M \text{ und } y \in N\}$
- Potenzmenge: $\mathcal{P}(M) :=$ Die Menge aller Teilmengen von M.

Verknüpfungen

Für diese Verknüpfungen gelten die folgenden Regeln:

$$
\begin{aligned}
(A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C), \\
(A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C), \\
A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C), \\
A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\
A \cup \emptyset &= A, \\
A \cap \emptyset &= \emptyset.
\end{aligned}
$$

BEWEIS: Wir zeigen nur

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Es folgt aus

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) \quad &\Leftrightarrow \quad (x \in A) \text{ und } (x \in B \cup C) \\ &\Leftrightarrow \quad (x \in A) \text{ und } (x \in B \text{ oder } x \in C) \\ &\Leftrightarrow \quad (x \in A \text{ und } x \in B) \text{ oder } (x \in A \text{ und } x \in C) \\ &\Leftrightarrow \quad (x \in A \cap B) \text{ oder } (x \in A \cap C) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

$\square$

Das Komplement

Sei $M \subset X$. Das Komplement von M in X ist

$$M^c := X \backslash M.$$

Für das Komplement haben wir die folgenden Eigenschaften: Seien $A, B \subset X$ mit Komplement $A^c = X \backslash A$ und $B^c = X \backslash B$. Dann gilt:

i) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

ii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

iii) ist $A \subset B$, so ist $B^c \subset A^c$.

Beweis: Wir zeigen nur i). Sei $x \in X$. i) folgt aus

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c &\Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \\ &\Leftrightarrow (x \notin A) \text{ und } (x \notin B) \\ &\Leftrightarrow (x \in A^c) \text{ und } (x \in B^c) \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c. \end{aligned}$$

Abbildungen

Definition 0.2

Seien M, N Mengen. Eine *Abbildung* f von M nach N

$$f : M \to N$$

ordnet jedem Element $x \in M$ ein Element $f(x) \in N$ zu.

Man bezeichnet die Abbildung $f : M \to N$ auch mit $x \mapsto f(x)$.

$$f : M \to N, \quad x \mapsto f(x).$$

Beispiele

- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n + 1$
- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n^2$ oder $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n^2$.

$$f : M \to N$$

M: Definitionsbereich von f, N: Wertebereich von f

$f(M) := \{f(x) : x \in M\}$ heißt auch Wertebereich von f oder Bild von M unter f.

Für $A \subset M$ nennt man die Menge
$f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ Bild von A

Für $B \subset N$ nennt man die Menge
$f^{-1}(B) := \{x \in N : f(x) \in B\}$ Urbild *von* B.

Für $N = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) wird f auch Funktion genannt.

Eine Abbildung (Funktion) $f : M \to N$ wird erklärt durch die Angabe:

- des Definitionsbereiches (hier M)
- des Bild- oder Wertebereiches (hier N)
- der Abbildungsvorschrift (hier $x \mapsto f(x)$).

Beispiel

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{wenn } n \text{ gerade ist} \\ -\frac{n-1}{2}, & \text{wenn } n \text{ ungerade ist} \end{cases}$$

Seien $f : M \to N$ und $f' : M' \to N'$ zwei Funktionen. Sie sind genau dann gleich, wann $M = M'$, $N = N'$ und

$$f(x) = f'(x) \quad \text{für alle } x \in M.$$

Definition 0.3

Die Abbildung $f : M \to N$ heißt

- injektiv, wenn aus $f(x) = f(x')$ folgt $x = x'$,
- surjektiv, wenn
  zu jedem $y \in N$ gibt es ein $x \in M$ mit $f(x) = y$,
- bijektiv, wenn f ist injektiv und surjektiv.

Definition 0.3

Die Abbildung $f : M \to N$ heißt

- injektiv, wenn aus $f(x) = f(x')$ folgt $x = x'$,
- surjektiv, wenn
  zu jedem $y \in N$ gibt es ein $x \in M$ mit $f(x) = y$,
- bijektiv, wenn f ist injektiv und surjektiv.

Beispiele

- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.
- $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}, f(n) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } n \text{ gerade ist} \\ 1, & \text{wenn } n \text{ ungerade ist} \end{cases}$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.
- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{wenn } n \text{ gerade ist} \\ -\frac{n-1}{2}, & \text{wenn } n \text{ ungerade ist} \end{cases}$ ist bijektiv.

Defintion 0.4

Seien M, N, L Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung. Sei $x \in M$

i) Zu der Abbildung $g : N \to L$ ist
die Komposition $g \circ f : M \to L$ die Abbildung definiert durch

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

ii) Die Abbildung $g : N \to M$ heißt inverse Abbildung (oder Umkehrabbildung) zu f, in Zeichen $g = f^{-1}$, wenn gilt:

$$g \circ f = id_M, \quad f \circ g = id_N.$$

Hierbei bezeichnet $id_M : M \to M$ die Identitätsabbildung, $id_M(x) = x$ für alle $x \in M$.

Eine bijektive Abbildung $f : M \to N$ hat eine inverse Abbildung $g : N \to M$, wobei wir jedem $y \in N$ das eindeutig bestimmt Urbild unter f zuordnen, dass heißt $g(y) = x$ mit $f(x) = y$. Es ist leicht zu nachprüfen, dass

$$f \circ g = id_N, \quad g \circ f = id_M.$$

$f : M \to N$ ist genau dann bijektiv, wann f eine inverse Abbildung $g : N \to M$ besitzt.

Beispiel

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ ist gerade} \\ -\frac{n-1}{2}, & n \text{ ist ungerade} \end{cases} \quad \text{ist bijektiv}$$

$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ ist gegeben durch

$$g(k) = \begin{cases} 2k, & \text{falls } k > 0 \\ -2k+1 & \text{falls } k \leq 0 \end{cases}$$