Analysis I

Guofang Wang

Universität Freiburg

19.10.2011

Körperaxiome

Wir setzen in dieser Vorlesung die reellen Zaheln als gegeben aus. Mit $\mathbb{R}$ bezeichnen wir die Menge aller reellen Zahlen, auf der folgende Strukturen gegeben sind:

- (Addition) eine Verknüpfung $+$, die je zwei $a, b \in \mathbb{R}$ ein $a+b \in \mathbb{R}$ zuordnet
- (Multiplikation) eine Verknüpfung $\cdot$, die je zwei $a, b \in \mathbb{R}$ ein $a \cdot b \in \mathbb{R}$ zuordnet,
- (Anordnung) eine Relation $a > b$, die für $a, b \in \mathbb{R}$ zutrifft oder nicht.

Es sollen dabei folgende drei Gruppen von Axiomen gelten:

- *Die Körperaxiome* (K)
- *Die Anordnungsaxiome* (A1, A2 und A3)
- *Das Vollständigkeitsaxiom* (V).

Körperaxiome

Wir wollen in der Folge die einzelnen Axiome vorstellen und beginnen mit den Körperaxiomen, die die arithmetischen Eigenschaften von $\mathbb{R}$ regeln, das heißt die Addition und die Multiplikation. Sie lauten wie folgt:

Addition $+$

Assoziativgesetz: $(a+b)+c = a+(b+c)$

Kommutativgesetz: $a+b = b+a$

Neutrales Element: *Es gibt eine Zahl* $0 \in \mathbb{R}$, *so dass für alle* $a \in \mathbb{R}$ *gilt:*

$$a + 0 = a$$

Inverses Element: *Zu jedem* $a \in \mathbb{R}$ *gibt es eine Lösung* $x \in \mathbb{R}$ *der Gleichung* $a + x = 0$

Körperaxiome

Multiplikation $\bullet$

Assoziativgesetz: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Kommutativgesetz: $a \cdot b = b \cdot a$

Neutrales Element: *Es gibt eine Zahl* $1 \in \mathbb{R}$ *mit* $1 \neq 0$, *so dass für alle* $a \in \mathbb{R}$ *gilt:*
$$a \cdot 1 = a$$

Inverses Element: *Zu jedem* $a \in \mathbb{R}$ *gibt es Lösung* $y \in \mathbb{R}$ *der Gleichung* $a \cdot y = 1$ *falls* $a \neq 0$

Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$

Körperaxiome

$+$	$\bullet$
$(a+b)+c = a+(b+c)$	$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$
$a+b = b+a$	$a\cdot b = b\cdot a$

Es gibt Zahlen $0,\ 1 \in \mathbb{R}$ *mit* $1 \neq 0$*, so dass für alle* $a \in \mathbb{R}$ *gilt:*

$a+0 = a$	$a\cdot 1 = a$

Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ *gibt es Lösungen* $x, y \in \mathbb{R}$ *der Gleichungen*

$a+x = 0$	$a\cdot y = 1$ *falls* $a \neq 0$

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c.$$

Definition 1.1

Eine Menge $\mathbb{K}$ mit Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, so dass die obigen Axiome erfüllt sind, heißt *Körper* (englisch: *field*).

Körper

Beispiel

$\mathbb{R}$ *und* $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$.

In der Algebra treten viele verschiedene Körper auf, ein extremes Beispiel ist

Beispiel

$\mathbb{K}_2 = \{0, 1\}$ *mit* $1 + 1 = 0$ *und den sonst üblichen Rechenregeln.*

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \textit{und} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Eindeutigkeit der neutralen und inversen Elemente

Folgerung 1.1.

(1). Die neutralen Elemente sind durch die Axiome eindeutig bestimmt.
(2). Die inversen Elemente sind ebenfalls eindeutig bestimmt.

BEWEIS: (1). Zum Beispiel wären $0_1 \in \mathbb{R}$ und $0_2 \in \mathbb{R}$ neutrale Elemente für die Addition, so folgt mit dem Kommutativgesetz

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2.$$

Das Argument für die Eindeutigkeit von $1 \in \mathbb{R}$ ist analog.
(2). Für zwei Lösungen $x_{1,2}$ der Gleichung $a + x = 0$ folgt mit dem Assoziativgesetz und dem Kommutativgesetz

$$x_1 = x_1+0 = x_1+(a+x_2) = (x_1+a)+x_2 = (a+x_1)+x_2 = 0+x_2 = x_2.$$

Wieder ist das Argument für die Multiplikation analog. □

Bezeichnung

Bezeichnung. Wir bezeichnen die Lösung x der Gleichung $a + x = 0$ mit $-a$ sowie die Lösung y der Gleichung $ay = 1$ mit $1/a$ oder a^{-1}, und vereinbaren die Notation

$$a - b = a + (-b) \qquad \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1}.$$

Rechnungsregeln

Aus den Körperaxiomen leiten sich unter anderem folgende Rechengesetze ab.

Satz 1.1. (Rechnen in $\mathbb{R}$)

Für reelle Zahlen a, b gelten folgende Aussagen:

$$\begin{cases} -(-a) = a & -(a+b) = (-a) + (-b), \\ (a^{-1})^{-1} = a & (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \text{ für } b \neq 0, \\ a \cdot 0 = 0 & a(-b) = -(ab), \\ (-a)(-b) = ab & a(b-c) = ab - ac. \end{cases} \tag{1.1}$$

$$ab = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \text{ oder } b = 0 \quad \text{(Nullteilerfreiheit).} \tag{1.2}$$