Analysis I

Guofang Wang

Universität Freiburg

25.10.2011

Körperaxiome

Wir setzen in dieser Vorlesung die reellen Zaheln als gegeben aus. Mit $\mathbb{R}$ bezeichnen wir die Menge aller reellen Zahlen, auf der folgende Strukturen gegeben sind:

- (Addition) eine Verknüpfung $+$, die je zwei $a, b \in \mathbb{R}$ ein $a+b \in \mathbb{R}$ zuordnet
- (Multiplikation) eine Verknüpfung $\cdot$, die je zwei $a, b \in \mathbb{R}$ ein $a \cdot b \in \mathbb{R}$ zuordnet,
- (Anordnung) eine Relation $a > b$, die für $a, b \in \mathbb{R}$ zutrifft oder nicht.

Es sollen dabei folgende drei Gruppen von Axiomen gelten:

- *Die Körperaxiome* (K)
- *Die Anordnungsaxiome* (A1, A2 und A3)
- *Das Vollständigkeitsaxiom* (V).

Körperaxiome

Wir wollen in der Folge die einzelnen Axiome vorstellen und beginnen mit den Körperaxiomen, die die arithmetischen Eigenschaften von $\mathbb{R}$ regeln, das heißt die Addition und die Multiplikation. Sie lauten wie folgt:

Addition $+$

Assoziativgesetz:	$(a+b)+c = a+(b+c)$
Kommutativgesetz:	$a+b = b+a$
Neutrales Element:	*Es gibt eine Zahl* $0 \in \mathbb{R}$, *so dass für alle* $a \in \mathbb{R}$ *gilt:* $a+0=a$
Inverses Element:	*Zu jedem* $a \in \mathbb{R}$ *gibt es eine Lösung* $x \in \mathbb{R}$ *der Gleichung* $a+x=0$

Körperaxiome

Multiplikation $\cdot$

Assoziativgesetz: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Kommutativgesetz: $a \cdot b = b \cdot a$

Neutrales Element: *Es gibt eine Zahl* $1 \in \mathbb{R}$ *mit* $1 \neq 0$, *so dass für alle* $a \in \mathbb{R}$ *gilt:*

$$a \cdot 1 = a$$

Inverses Element: *Zu jedem* $a \in \mathbb{R}$ *gibt es Lösung* $y \in \mathbb{R}$ *der Gleichung* $a \cdot y = 1$ *falls* $a \neq 0$

Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$

Körperaxiome

$+$	$\bullet$
$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$

Es gibt Zahlen $0,\ 1\in\mathbb{R}$ *mit* $1\neq 0$, *so dass für alle* $a\in\mathbb{R}$ *gilt:*

$$a+0=a \qquad\qquad a\cdot 1=a$$

Zu jedem $a\in\mathbb{R}$ *gibt es Lösungen* $x,y\in\mathbb{R}$ *der Gleichungen*

$$a+x=0 \qquad\qquad a\cdot y=1 \quad \textit{falls} \quad a\neq 0$$

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c.$$

Definition 1.1

Eine Menge $\mathbb{K}$ mit Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, so dass die obigen Axiome erfüllt sind, heißt *Körper* (englisch: *field*).

Körper

Beispiel

$\mathbb{R}$ *und* $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$.

In der Algebra treten viele verschiedene Körper auf, ein extremes Beispiel ist

Beispiel

$\mathbb{K}_2 = \{0, 1\}$ *mit* $1 + 1 = 0$ *und den sonst üblichen Rechenregeln.*

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \textit{und} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Eindeutigkeit der neutralen und inversen Elemente

Folgerung 1.1.

(1). Die neutralen Elemente sind durch die Axiome eindeutig bestimmt.
(2). Die inversen Elemente sind ebenfalls eindeutig bestimmt.

Beweis: (1). Zum Beispiel wären $0_1 \in \mathbb{R}$ und $0_2 \in \mathbb{R}$ neutrale Elemente für die Addition, so folgt mit dem Kommutativgesetz

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2.$$

Das Argument für die Eindeutigkeit von $1 \in \mathbb{R}$ ist analog.
(2). Für zwei Lösungen $x_{1,2}$ der Gleichung $a + x = 0$ folgt mit dem Assoziativgesetz und dem Kommutativgesetz

$$x_1 = x_1 + 0 = x_1 + (a + x_2) = (x_1 + a) + x_2 = (a + x_1) + x_2 = 0 + x_2 = x_2.$$

Wieder ist das Argument für die Multiplikation analog. $\square$

Bezeichnung

Bezeichnung. Wir bezeichnen die Lösung x der Gleichung $a + x = 0$ mit $-a$ sowie die Lösung y der Gleichung $ay = 1$ mit $1/a$ oder a^{-1}, und vereinbaren die Notation

$$a - b = a + (-b) \qquad \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1}.$$

Rechnungsregeln

Aus den Körperaxiomen leiten sich unter anderem folgende Rechengesetze ab.

Satz 1.1. (Rechnen in $\mathbb{R}$)

Für reelle Zahlen a, b gelten folgende Aussagen:

$$\begin{cases} -(-a) = a & -(a+b) = (-a)+(-b), \\ (a^{-1})^{-1} = a & (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \text{ für } b \neq 0, \\ a \cdot 0 = 0 & a(-b) = -(ab), \\ (-a)(-b) = ab & a(b-c) = ab - ac. \end{cases} \tag{1.1}$$

$$ab = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \text{ oder } b = 0 \quad \text{(Nullteilerfreiheit).} \tag{1.2}$$

Beweis: Die erste Zeile von (1.2) folgt mit der Eindeutigkeit der Inversen aus $(-a) + a = a + (-a) = 0,$

$$(a+b) + ((-a)+(-b)) = (a+(-a)) + (b+(-b)) = 0 + 0 = 0.$$

Rechnungsregeln

Satz 1.1. (Rechnen in $\mathbb{R}$)

Für reelle Zahlen a, b gelten folgende Aussagen:

$$\begin{cases} -(-a) = a & -(a+b) = (-a) + (-b), \\ (a^{-1})^{-1} = a & (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \text{ für } b \neq 0, \\ a \cdot 0 = 0 & a(-b) = -(ab), \\ (-a)(-b) = ab & a(b-c) = ab - ac. \end{cases}$$

$$ab = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \text{ oder } b = 0 \quad \text{(Nullteilerfreiheit).}$$

Beweis: Der Beweis der zweiten Zeile ist analog.

Rechnungsregeln

Satz 1.1. (Rechnen in $\mathbb{R}$)

Für reelle Zahlen a, b gelten folgende Aussagen:

$$\begin{cases} -(-a) = a & -(a+b) = (-a) + (-b), \\ (a^{-1})^{-1} = a & (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \text{ für } b \neq 0, \\ a \cdot 0 = 0 & a(-b) = -(ab), \\ (-a)(-b) = ab & a(b-c) = ab - ac. \end{cases}$$

$$ab = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \text{ oder } b = 0 \quad \text{(Nullteilerfreiheit)}.$$

Beweis: Nun gilt $a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0$. Nach Addition von $-a \cdot 0$ folgt $a \cdot 0 = 0$. Daraus ergibt sich weiter

$$ab + a(-b) = a(b + (-b)) = a \cdot 0 = 0,$$

also $a(-b) = -ab$, und dann

$$(-a)(-b) = -((-a)b) = -(b(-a)) = -(-ba) = ba = ab.$$

Rechnungsregeln

Satz 1.1. (Rechnen in $\mathbb{R}$)

Für reelle Zahlen a, b gelten folgende Aussagen:

$$\begin{cases} -(-a) = a & -(a+b) = (-a) + (-b), \\ (a^{-1})^{-1} = a & (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \text{ für } b \neq 0, \\ a \cdot 0 = 0 & a(-b) = -(ab), \\ (-a)(-b) = ab & a(b-c) = ab - ac. \end{cases}$$

$$ab = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \text{ oder } b = 0 \quad \text{(Nullteilerfreiheit)}.$$

Beweis: Die letzte Aussage folgt mit
$a(b-c) = a(b+(-c)) = ab + a(-c) = ab + (-ac) = ab - ac.$

Ist in (1.2) $a \neq 0$, so folgt $0 = ab \cdot \frac{1}{a} = (a \cdot \frac{1}{a}) \cdot b = 1 \cdot b = b.$
Damit sind alle Aussagen des Satzes gezeigt. □

Bruchrechnung

Auch die folgenden Regeln der Bruchrechnung lassen sich aus den Körperaxiomen herleiten, dies sei jedoch den Lesern überlassen.

Folgerung 1.2 (Bruchrechnung)

Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $c, d \neq 0$ gilt:

(1) $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{d} = \dfrac{ad + bc}{cd}$,

(2) $\dfrac{a}{c} \cdot \dfrac{b}{d} = \dfrac{ab}{cd}$,

(3) $\dfrac{a/c}{b/d} = \dfrac{ad}{bc}$, falls zusätzlich $b \neq 0$.

Das Summezeichen

Für reelle Zahlen $a_m, \ldots, a_n$ setzen wir

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + \ldots + a_n \quad (m, n \in \mathbb{Z}).$$

Mit des Kommutativgesetzes und des Assoziativgestzes kann man leicht zeigen, dass es wohldefiniert ist. Der Index k durchläuft dabei die ganzen Zahlen von der unteren Grenze $k = m$ bis zur oberen Grenze $k = n$. Der Laufindex k kann substituiert werden, wobei die Grenzen umzurechnen sind. Zum Beispiel liefert
$k = j + 1$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m-1}^{n-1} a_{j+1} = a_m + \ldots + a_n.$$

Das Summezeichen und Das Produktzeichen

Es ist praktisch den Fall zuzulassen, dass die untere Grenze größer als die obere Grenze ist, und in diesem Fall die Summe gleich Null zu setzen. Dass heißt

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0 \quad \text{falls } n < m.$$

Das Produktzeichen ist ganz analog erklärt:

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Das leere Produkt wird gleich Eins gesetzt, d.h.,

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = 1 \quad \text{falls } n < m.$$

Anordnungsaxiome

Als nächstes formulieren wir die Anordnungsaxiome.

(A1) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Aussagen

$$a > 0, \quad a = 0, \quad \text{oder} \quad -a > 0.$$

(A2) Aus $a, b > 0$ folgt $a + b > 0$ und $ab > 0$.

(A3) Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1/n < \varepsilon$ (*Archimedisches Axiom*).

Wir diskutieren zuerst die ersten zwei Anordnungsaxiome. Das dritte, das Archimedische Axiom, werden wir erst später benutzen, wenn es für den Grenzwertbegriff gebraucht wird.

Bezeichnung. Statt $-a > 0$ schreiben wir auch $a < 0$, und statt $a - b > 0$ auch $a > b$.

Rechnungsregeln von Ungleichungen

Hier einige Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen **(A1)** und **(A2)**.

Satz 1.2 (Renhnen mit Ungleichungen)

(1) (Trichotomie) Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Relationen $a > b$, $a = b$ oder $a < b$.

(2) (Transitivität) Aus $a > b$, $b > c$ folgt $a > c$.

(3) Aus $a > b$ folgt

$$\begin{cases} a + c > b + c & \\ ac > bc, & \text{wenn } c > 0 \\ ac < bc, & \text{wenn } c < 0 \end{cases}$$

Rechnungsregeln von Ungleichungen, Fortsetzung

Satz 1.2 (Renhnen mit Ungleichungen)

(4) Aus $a > b$ und $c > d$ folgt

$$\begin{cases} a + c & > & b + d, & \\ ac & > & bd, & \text{falls } b, d > 0 \end{cases}$$

(5) Für $a \neq 0$ ist $a^2 > 0$.

(6) Aus $a > 0$ folgt $1/a > 0$.

(7) Aus $a > b$, $b > 0$ folgt $1/a < 1/b$.

Beweis

Beweis: (1) folgt direkt aus (A1) und der Definition von $a > b$.
Für (2) rechnen wir

$$a - c = (a - b) + (b - c) > 0 \quad \text{nach (A2).}$$

Ähnlich ergeben sich (3) und (4):

$$\begin{aligned}
(a+c) - (b+c) &= a - b > 0, \\
ac - bc &= (a-b)c > 0 && \text{im Fall } c > 0 \text{ nach (A2} \\
bc - ac &= (a-b)(-c) > 0 && \text{im Fall } c < 0 \text{ nach (A2} \\
(a+c) - (b+d) &= (a-b) + (c-d) > 0 && \text{nach (A2),} \\
ac - bd &= ac - bc + bc - bd \\
&= (a-b)c + b(c-d) > 0 && \text{nach (2) und (A2).}
\end{aligned}$$

Beweis, Fortzetzung

Die Positivität von Quadraten folgt aus der Fallunterscheidung

$$a^2 = \begin{cases} a \cdot a > 0 & \text{im Fall } a > 0, \\ (-a) \cdot (-a) > 0 & \text{im Fall } -a > 0. \end{cases}$$

Dabei haben wir die Regel $(-a)(-b) = ab$ aus (1.2) benutzt. Nach (A1) ist $a^2 > 0$ für $a \neq 0$ bewiesen. Aussage (6) ergibt sich nun mit

$$\frac{1}{a} = \left(\frac{1}{a}\right)^2 \cdot a > 0 \quad \text{nach (5) und (A2).}$$

Zu guter Letzt haben wir für (7)

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{ab}(a-b) > 0 \quad \text{mit (6) und (A2).}$$

$\square$

Betrag

Definition 1.2 (Betrag einer reellen Zahl)

Der Betrag von $a \in \mathbb{R}$ ist

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Ein anschauliches Modell der reellen Zahlen ist die Zahlengerade. Ist $a < b$, so liegt b rechts von a im Abstand $|a - b|$. Insbesondere ist $|a|$ der Abstand zum Nullpunkt.

Rechnungsregeln von Beträgen

Satz 1.3. (Rechnen mit Beträgen)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gelten folgende Aussagen:

(1) $|-a| = |a|$ und $a \leq |a|$.

(2) $|a| \geq 0$; aus Gleichheit folgt $a = 0$.

(3) $|ab| = |a| \cdot |b|$.

(4) $|a + b| \leq |a| + |b|$. (Dreiecke-Ungleichung)

(5) $|a - b| \geq ||a| - |b||$.

Beweis: Aus Definition 1.2 folgt

$$|-a| = \begin{cases} -a & \text{falls } -a \geq 0 \\ -(-a) & \text{falls } -a \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} -a & \text{falls } a \leq 0 \\ a & \text{falls } a \geq 0 \end{cases} = |a|.$$

Weiter folgt (2) aus $|a| - a = \begin{cases} 0 & \text{falls } a \geq 0, \\ -a - a \geq 0 & \text{falls } a \leq 0. \end{cases}$

Rechnungsregeln von Beträgen

Satz 1.3. (Rechnen mit Beträgen)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gelten folgende Aussagen:

(1) $|-a| = |a|$ und $a \leq |a|$.

(2) $|a| \geq 0$; aus Gleichheit folgt $a = 0$.

(3) $|ab| = |a| \cdot |b|$.

(4) $|a+b| \leq |a| + |b|$. (Dreiecke-Ungleichung)

(5) $|a-b| \geq ||a| - |b||$.

BEWEIS: In (3) bleiben die linke und rechte Seite gleich, wenn wir a durch $-a$ ersetzen, dasselbe gilt bezüglich b. Also können wir $a, b \geq 0$ annehmen, und erhalten $|ab| = ab = |a| \cdot |b|$ wie verlangt. Für (4) schätzen wir mit (1) wie folgt ab:

$$|a+b| = \pm(a+b) = \pm a + (\pm b) \leq |a| + |b|.$$

Rechnungsregeln von Beträgen

Satz 1.3. (Rechnen mit Beträgen)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gelten folgende Aussagen:

(1) $|-a| = |a|$ und $a \leq |a|$.

(2) $|a| \geq 0$; aus Gleichheit folgt $a = 0$.

(3) $|ab| = |a| \cdot |b|$.

(4) $|a+b| \leq |a| + |b|$. (Dreiecke-Ungleichung)

(5) $|a-b| \geq ||a| - |b||$.

Beweis: Schließlich gilt $|a| = |a-b+b| \leq |a-b| + |b|$ nach (4), also $|a-b| \geq |a| - |b|$. Durch Vertauschen von a und b folgt (5). $\square$