Analysis I

Guofang Wang

Universität Freiburg

2.11.2016

Kapital 2. Konvergenz

1. Grenzwerte von Folgen

Definition 1.1 (Folge)

Eine Folge reeller Zahlen ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto a_n.$$

a_n heißt das *n-te Glied* der Folge, die Folge insgesamt wird mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. kurz mit (a_n) bezeichnet.

Oft wird die Folge durch

- das Bildungsgesetz angegeben, durch
- Aufzählen der ersten Folgenglieder oder durch
- die rekursive Definition definiert.

Zum Beispiel ist die Folge der Quadratzahlen gegeben durch $a_n = n^2$, bzw. alternativ aufzählend $a_n = 1, 4, 9, 16, \cdots$.

Beispiel 1.1 (Folge der Fibonaccizahlen)

Ist $a_1 = 0$ und $a_2 = 1$, und für $n \geq 3$ ist a_n durch die Rekursionsvorschrift $a_n := a_{n-1} + a_{n-2}$ gegeben.

Beispiele

Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit folgenglieder a_n

- $a_n = a$, $a \in \mathbb{R}$ (Konstante Folge)
- $a_n = 1/n$. (Harmonische Folge)
- $a_n = q^n$ (Geometrische Folge)
- $a_n = (-1)^n$

Definition 1.1 (Konvergenz von Folgen)

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit $n \to \infty$ gegen $a \in \mathbb{R}$, falls gilt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{R}$, so dass für alle $n > N$ gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Die Zahl a heißt dann *Grenzwert der Folge* und wir schreiben kurz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \to a \text{ für } n \to \infty.$$

(gelesen: a_n strebt gegen a für n gegen unendlich)
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, das Grenzwert der Folge ist; andernfalls heißt die Folge divergent.

Mit den Quantoren $\forall$ (für alle), $\exists$ (existiert) und $\Rightarrow$ (daraus folgt) lässt sich die Definition der Konvergenz auch wie folgt fassen:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{R} : \quad \Big(n > N \quad \Rightarrow \quad |a_n - a| < \varepsilon \Big).$$

Beispiel 1.2 (Harmonische Folge)

Die Folge $a_n = 1/n$ konvergiert gegen $a = 0$.

Beweis: Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir $N = 1/\varepsilon$, und es folgt für alle $n > N$

$$|a_n - a| = |1/n - 0| = 1/n < 1/N = \varepsilon.$$

$\square$

Je kleiner die geforderte Abweichung $\varepsilon > 0$ vom Grenzwert und damit die Genauigkeit der Approximation sein soll, desto größer muss im allgemeinen die Zahl N in der Definition des Grenzwerts gewählt werden, d.h., wie in obigem Beispiel hängt N von ε ab,

$$N = N(\varepsilon).$$

Eine Ausnahme bildet hier nur die konstante Folge.

Beispiel 1.3 (Konstante Folge)

Ist $a_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Beweis: Denn für $\varepsilon > 0$ gilt $|a_n - a| = 0 < \varepsilon$ für alle $n > 0$, also können wir immer $N = 0$ wählen. □

Übrigens ist es egal, ob in der Definition des Grenzwerts statt $N \in \mathbb{R}$ die Bedingung $N \in \mathbb{N}$ verlangt wird, denn wir können statt $N \in \mathbb{R}$ ja immer die nächstgrößere natürliche Zahl nehmen.

Überhaupt kann N immer vergrößert werden, und in der Regel besteht kein Interesse daran, dass kleinstmögliche $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq N(\varepsilon)$ zu finden.

Beispiel 1.4 (Geometrische Folge)

Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$. Wir betrachten $(a_n) = (q^n)$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Beweis: Um das zu zeigen, können wir $q \neq 0$ voraussetzen und haben dann $1/|q| > 1$, also gilt $1/|q| = 1 + x$ für ein $x > 0$. Es folgt mit der Bernoulli-Ungleichung, Satz 2.2 im Kapital 1,

$$|q^n - 0| = |q|^n = \frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{nx} < \varepsilon$$

für alle $n > 1/(\varepsilon x)$. Wir können also $N = 1/(\varepsilon x)$ wählen. $\square$

Beispiel 1.5 (divergente Folge)

Die Folge $a_n = (-1)^n$, also $a_n = -1, 1, -1, \ldots$ ist nicht konvergent.

Beweis: Angenommen es wäre $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Zu $\varepsilon = 1$ gibt es dann ein $N \in \mathbb{R}$ mit $|a_n - a| < 1$ für $n > N$, also gilt für $n > N$

$$\begin{aligned} 2 &= |a_n - a_{n+1}| = |a_n - a + a - a_{n+1}| \\ &\leq |a_n - a| + |a - a_{n+1}| < 1 + 1 = 2, \end{aligned}$$

ein Widerspruch. $\square$