Analysis I

Guofang Wang

Universität Freiburg

8.11.2016

Kapitel 2. Konvergenz

1. Grenzwerte von Folgen

Definition 1.1 (Folge)

Eine Folge reeller Zahlen ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto a_n.$$

a_n heißt das *n-te Glied* der Folge, die Folge insgesamt wird mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. kurz mit (a_n) bezeichnet.

Oft wird die Folge durch

- das Bildungsgesetz angegeben, durch
- Aufzählen der ersten Folgenglieder oder durch
- die rekursive Definition definiert.

Zum Beispiel ist die Folge der Quadratzahlen gegeben durch $a_n = n^2$, bzw. alternativ aufzählend $a_n = 1, 4, 9, 16, \cdots$.

Beispiel 1.1 (Folge der Fibonaccizahlen)

Ist $a_1 = 0$ und $a_2 = 1$, und für $n \geq 3$ ist a_n durch die Rekursionsvorschrift $a_n := a_{n-1} + a_{n-2}$ gegeben.

Beispiele

Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit folgenglieder a_n

- $a_n = a$, $a \in \mathbb{R}$ (Konstante Folge)
- $a_n = 1/n$. (Harmonische Folge)
- $a_n = q^n$ (Geometrische Folge)
- $a_n = (-1)^n$

Definition 1.1 (Konvergenz von Folgen)

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit $n \to \infty$ gegen $a \in \mathbb{R}$, falls gilt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{R}$, so dass für alle $n > N$ gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Die Zahl a heißt dann *Grenzwert der Folge* und wir schreiben kurz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \to a \text{ für } n \to \infty.$$

(gelesen: a_n strebt gegen a für n gegen unendlich)
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, das Grenzwert der Folge ist; andernfalls heißt die Folge divergent.

Mit den Quantoren $\forall$ (für alle), $\exists$ (existiert) und $\Rightarrow$ (daraus folgt) lässt sich die Definition der Konvergenz auch wie folgt fassen:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{R} : \quad \Big(n > N \quad \Rightarrow \quad |a_n - a| < \varepsilon \Big).$$

Beispiel 1.2 (Harmonische Folge)

Die Folge $a_n = 1/n$ konvergiert gegen $a = 0$.

Beweis: Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir $N = 1/\varepsilon$, und es folgt für alle $n > N$

$$|a_n - a| = |1/n - 0| = 1/n < 1/N = \varepsilon.$$

$\square$

Je kleiner die geforderte Abweichung $\varepsilon > 0$ vom Grenzwert und damit die Genauigkeit der Approximation sein soll, desto größer muss im allgemeinen die Zahl N in der Definition des Grenzwerts gewählt werden, d.h., wie in obigem Beispiel hängt N von ε ab,

$$N = N(\varepsilon).$$

Eine Ausnahme bildet hier nur die konstante Folge.

Beispiel 1.3 (Konstante Folge)

Ist $a_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Beweis: Denn für $\varepsilon > 0$ gilt $|a_n - a| = 0 < \varepsilon$ für alle $n > 0$, also können wir immer $N = 0$ wählen. □

Übrigens ist es egal, ob in der Definition des Grenzwerts statt $N \in \mathbb{R}$ die Bedingung $N \in \mathbb{N}$ verlangt wird, denn wir können statt $N \in \mathbb{R}$ ja immer die nächstgrößere natürliche Zahl nehmen.

Überhaupt kann N immer vergrößert werden, und in der Regel besteht kein Interesse daran, dass kleinstmögliche $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq N(\varepsilon)$ zu finden.

Beispiel 1.4 (Geometrische Folge)

Sei $q \in \mathbb{R}$ *mit* $|q| < 1$. *Wir betrachten* $(a_n) = (q^n)$. *Dann gilt* $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Beweis: Um das zu zeigen, können wir $q \neq 0$ voraussetzen und haben dann $1/|q| > 1$, also gilt $1/|q| = 1 + x$ für ein $x > 0$. Es folgt mit der Bernoulli-Ungleichung, Satz 2.2 im Kapital 1,

$$|q^n - 0| = |q|^n = \frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{nx} < \varepsilon$$

für alle $n > 1/(\varepsilon x)$. Wir können also $N = 1/(\varepsilon x)$ wählen. $\square$

Beispiel 1.5 (divergente Folge)

Die Folge $a_n = (-1)^n$, also $a_n = -1, 1, -1, \ldots$ ist nicht konvergent.

Beweis: Angenommen es wäre $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Zu $\varepsilon = 1$ gibt es dann ein $N \in \mathbb{R}$ mit $|a_n - a| < 1$ für $n > N$, also gilt für $n > N$

$$\begin{aligned} 2 &= |a_n - a_{n+1}| = |a_n - a + a - a_{n+1}| \\ &\leq |a_n - a| + |a - a_{n+1}| < 1 + 1 = 2, \end{aligned}$$

ein Widerspruch. $\square$

Der Begriff des Grenzwerts wird anschaulicher, indem wir folgende Teilmengen von $\mathbb{R}$ einführen.

Definition 1.3 (ε-Umgebung)

ε-Umgebung von $a \in \mathbb{R}$ ist die Menge

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}.$$

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn die Folgenglieder ab einer gewissen Nummer in der ε-Umgebung von a liegen, egal wie klein $\varepsilon > 0$ gewählt ist.

Satz 1.1 (Eindeutigkeit des Grenzwerts)

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, so ist ihr Grenzwert eindeutig bestimmt.

BEWEIS: Wir beginnen mit einer Vorüberlegung, und zwar behaupten wir

$$0 < 2\varepsilon \le |a - a'| \quad \Rightarrow \quad U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a') = \emptyset. \tag{1.1}$$

Denn ist $x \in U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a')$, so folgt mit der Dreiecksungleichung

$$|a - a'| = |a - x + x - a'| \le |x - a| + |x - a'| < 2\varepsilon.$$

Seien nun $a, a' \in \mathbb{R}$ Grenzwerte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es dann $N, N' \in \mathbb{R}$ mit $a_n \in U_\varepsilon(a)$ für $n > N$, sowie $a_n \in U_\varepsilon(a')$ für $n > N'$. Wäre $a \neq a'$, so wählen wir $\varepsilon = \frac{1}{2}|a - a'| > 0$ und erhalten für $n > \max(N, N')$

$$a_n \in U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a') = \emptyset,$$

ein Widerspruch. $\square$

Unser nächstes Ziel ist es, einige Rechenregeln für Grenzwerte zu erarbeiten. Wir beginnen mit der

Definition 1.4 (Beschränktheit von Folgen)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt

a) nach oben (bzw. nach unten) beschränkt, wenn es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \leq K$ (bzw. $a_n \geq K$) für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) beschränkt, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Beispiel 1.6

Die Folge $a_n = n$ ist nach unten beschränkt, denn es ist zum Beispiel $a_n \geq 0$ für alle n. Sie ist aber nicht nach oben beschränkt: angenommen, es gibt ein $K \in \mathbb{R}$ mit $a_n \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $K \geq a_1 = 1 > 0$, also auch $1/K > 0$, und nach Archimedes (A3) gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1/n < 1/K$, also $a_n = n > K$, ein Widerspruch.

Satz 1.2 (konvergent $\Rightarrow$ beschränkt)

Jede konvergente Folge ist beschänkt.

BEWEIS: Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Wähle zu $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{R}$ mit $|a_n - a| < 1$ für $n > N$. Wir können $N \in \mathbb{N}$ annehmen, andernfalls ersetzen wir N durch die nächstgrößere natürliche Zahl. Es gilt dann

$$\begin{aligned} n > N \quad &\Rightarrow \quad |a_n| = |a_n - a + a| \le |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \\ n \le N \quad &\Rightarrow \quad |a_n| \le \max(|a_1|, \dots, |a_N|). \end{aligned}$$

Wir haben also $|a_n| \le K$ für alle n, wobei $K = \max(|a_1|, \dots, |a_N|, 1 + |a|)$. $\square$

Bemerkung. beschränkt $\not\Rightarrow$ konvergente.

Satz 1.3 (Rechenregeln für Grenzwerte)

Es gelte $a_n \to a, b_n \to b$ mit $n \to \infty$.

a) Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $(\lambda a_n + \mu b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert
$\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda a + \mu b.$

b) Die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit Grenzwert
$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b.$

c) Falls $b \neq 0$, so gibt es ein $N_0 \in \mathbb{R}$ mit $b_n \neq 0$ für $n > N_0$ und die Folge $(a_n/b_n)_{n>N_0}$ ist konvergent mit Grenzwert
$\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = a/b.$

BEWEIS: Wir beginnen mit dem Beweis von b). Nach Satz 1.2 gibt es ein $K > 0$ mit $|a_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und außerdem mit $|b| \leq K$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |a_n - a| \cdot |b| \\ &\leq K(|a_n - a| + |b_n - b|). \end{aligned}$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nun ein $N \in \mathbb{R}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon/(2K)$ sowie $|b_n - b| < \varepsilon/(2K)$ für $n > N$. Also folgt für $n > N$

$$|a_n b_n - ab| < K\left(\frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2K}\right) = \varepsilon.$$

Für a) reicht es wegen b), den Fall $\lambda = \mu = 1$ zu betrachten. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{R}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon/2$ und $|b_n - b| < \varepsilon/2$ für $n > N$. Es folgt für $n > N$

$$|(a_n+b_n)-(a+b)| = |(a_n-a)+(b_n-b)| \leq |a_n-a|+|b_n-b| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Für c) können wir uns auf den Fall $a_n = b = 1$ beschränken, denn sonst schreiben wir

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n}{b} \cdot \frac{1}{b'_n} \text{ mit } b'_n = \frac{b_n}{b}$$

und wenden b) an. Es gibt nun ein $N_0 \in \mathbb{R}$ mit $|b_n - 1| \leq \frac{1}{2}$ für $n > N_0$, also

$$|b_n| = |1 - (1 - b_n)| \geq 1 - |1 - b_n| \geq \frac{1}{2} > 0.$$

Damit ist die erste Aussage gezeigt. Zu $\varepsilon > 0$ wähle weiter $N \geq N_0$ mit $|1 - b_n| < \varepsilon/2$ für $n > N$, und somit

$$\left|\frac{1}{b_n} - 1\right| = \frac{|1 - b_n|}{b_n} < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Hier zwei Anwendungen der Rechenregeln für Grenzwerte.

Beispiel 1.7 (Grenzwerte rationaler Funktionen)

Seien $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *Polynome vom Grad* $m, n \in \mathbb{N}_0$, *das heißt für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt*
$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_0$
und
$q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0,$
wobei $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ *mit* $a_m, b_n \neq 0$. *Wir bestimmen im Fall* $m \leq n$ *das Verhalten von* $p(k)/q(k)$ *für* $k \to \infty$, *und zwar liefert mehrfache Anwendung der Konvergenzregeln in Satz 1.3*

$$\frac{p(k)}{q(k)} = k^{m-n} \frac{a_m + a_{m-1}k^{-1} + \ldots + a_0 k^{-m}}{b_n + b_{n-1}k^{-1} + \ldots + b_0 k^{-n}} \to \begin{cases} a_m/b_n & \text{falls } m = n, \\ 0 & \text{falls } m < n. \end{cases}$$

Beispiel 1.8 (geometrische Reihe)

Für $-1 < q < 1$ *betrachten wir die Folge* $a_n = 1 + q + \ldots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k$. *Dann ergibt sich aus Beispiel 2.2 im Kapital 1, Beispiel 1.4 und Satz 1.3*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

Wir schreiben hierfür auch $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1/(1-q)$.

Definition 1.5

Folgen, deren Folgenglieder Summen sind, heißen Reihen.

Die Reihen spielen eine große Rolle in der Analysis und werden in Kürze ausführlicher untersucht.

Satz 1.4 (Grenzwerte und Ungleichungen)

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, mit Grenzwerten $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gelten folgende Aussagen:

a) Ist $a_n \leq b_n$ für alle n, so folgt $a \leq b$.

b) Gilt $c \leq a_n \leq d$ für alle n mit $c, d \in \mathbb{R}$, so folgt $c \leq a \leq d$.

c) Ist $a_n \leq c_n \leq b_n$ und gilt $a = b$, so konvergiert auch die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a = b$.

BEWEIS: Nach Voraussetzung gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{R}$ mit $a_n > a - \varepsilon$ und $b_n < b + \varepsilon$ für alle $n > N$. Die Voraussetzung in a) liefert dann $a - \varepsilon < b + \varepsilon$ beziehungsweis $(a-b)/2 < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$, also $a \leq b$.
Aussage b) folgt unmittelbar aus a), indem wir c, d als konstante Folgen auffassen.
Unter den Voraussetzungen in c) folgt für $n > N$ die Ungleichungskette

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < b + \varepsilon = a + \varepsilon,$$

also $\lim_{n\to\infty} c_n = a$ nach Definition des Grenzwerts. □

Achtung: aus $a_n < b_n$ folgt *nicht* $a < b$, sondern nur $a \leq b$. Die Striktheit von Ungleichungen geht beim Übergang zu Grenzwerten im allgemeinen verloren. Zum Beispiel gilt $1/n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$.

Beispiel 1.9 (n-te Wurzel)

Hier betrachten wir für $a > 0$ *und* $n \in \mathbb{N}$ *die Gleichung* $x^n = a$. *Es gibt höchstens eine Lösung* $x > 0$, *denn für* $x, y > 0$ *mit* $x > y$ *folgt* $x^n > y^n$, *oder*

$$x, y > 0 \text{ und } x^n \leq y^n \quad \Rightarrow \quad x \leq y.$$

Die Existenz der Lösung wird im nächsten Kapitel aus dem Vollständigkeitsaxiom hergeleitet. Damit gibt es genau eine Lösung $x > 0$, *die mit* $a^{1/n}$ *oder* $\sqrt[n]{a}$ *bezeichnet wird, und es gilt*

$$a, b > 0 \text{ und } a \leq b \quad \Rightarrow \quad a^{1/n} \leq b^{1/n}. \tag{1.2}$$

Wir behaupten nun

$$\lim_{n \to \infty} a^{1/n} = 1.$$

Beweis: Für $a \geq 1$ ist $a^{1/n} \geq 1$ nach (1.2). Wir setzen $\xi_n = a^{1/n} - 1 \geq 0$ und schließen aus der Bernoulli-Ungleichung,

$$a = (1 + \xi_n)^n \geq 1 + n\xi_n \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \xi_n \leq (a-1)/n.$$

Also folgt $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$ bzw. $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$ mit Satz 1.4 c).

Für $a < 1$ gilt

$$\left(a^{1/n} \cdot (a^{-1})^{1/n}\right)^n = a \cdot a^{-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad a^{1/n} = \frac{1}{(a^{-1})^{1/n}},$$

und die Behauptung folgt aus dem vorigen Fall mit Satz 1.3 c). $\square$

Definition 1.6 (Uneigentliche Konvergenz)

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich (oder divergiert bestimmt) gegen $+\infty$, falls gilt:

Zu jedem $K > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{R},$ so dass $a_n > K$ für alle $n > N$.

Wir schreiben $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ oder $a_n \to +\infty$ mit $n \to \infty$.
Uneigentliche Konvergenz gegen $-\infty$ ist analog definiert.

Beispiel

Für $q > 1$ *gilt* $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$. *Denn zu gegebenem* $K > 0$ *gibt es nach Beispiel 1.4 ein* $N \in \mathbb{R}$ *mit* $(1/q)^n < 1/K$ *für* $n > N$, *also* $q^n > K$ *für* $n > N$. *Insgesamt haben wir für das Verhalten der Folge* q^n *mit* $n \to \infty$ *folgende Tabelle:*

$$\begin{array}{rcl} q > 1 & \Rightarrow & \lim_{n\to\infty} q^n = +\infty, \\ q = 1 & \Rightarrow & \lim_{n\to\infty} q^n = 1, \\ -1 < q < 1 & \Rightarrow & \lim_{n\to\infty} q^n = 0, \\ q \leq -1 & \Rightarrow & (q^n) \text{ \textit{nicht konvergent.}} \end{array}$$

Der Fall $-1 < q < 1$ *wurde in Beispiel 1.4 behandelt, und der Fall* $q \leq -1$ *folgt mit etwas Überlegung aus Beispiel 1.5 (Übung).*

Für eine Folge mit $a_n > 0$ für alle n ist $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ äquivalent zu $\lim_{n\to\infty} 1/a_n = 0$ (Übungsaufgabe).

Zum Schluss dieses Abschnitts führen wir noch folgende Bezeichnungen für Teilmengen von $\mathbb{R}$ ein:

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	offenes Intervall
$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$	abgeschlossenes Intervall
$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$	rechtsseitig offen, linksseitig abgeschloss
$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$	linksseitig offen, rechtsseitig abgeschloss
$\lvert I \rvert = b - a$ für ein Intervall I	Intervalllänge

Hierbei sind $+\infty$ und $-\infty$ als offene Intervallgrenzen zugelassen, zum Beispiel ist $(-\infty, 1] = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x \leq 1\}$. Den ε-Umgebungen bei der Definition der Konvergenz entsprechen bei uneigentlicher Konvergenz gegen $+\infty$ die Intervalle $(K, +\infty)$: ab einem gewissen Index müssen alle Folgenglieder in $(K, +\infty)$ liegen, egal wie groß K gewählt ist.