Analysis I

Guofang Wang

Universität Freiburg

9.11.2016

Definition 1.1 (Konvergenz von Folgen)

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert** mit $n \to \infty$ gegen $a \in \mathbb{R}$, falls gilt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{R}$, so dass für alle $n > N$ gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{R} : \quad \Big(n > N \quad \Rightarrow \quad |a_n - a| < \varepsilon \Big).$$

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn die Folgenglieder ab einer gewissen Nummer in der ε-Umgebung von a liegen, egal wie klein $\varepsilon > 0$ gewählt ist.

Satz 1.3 (Rechenregeln für Grenzwerte)

Es gelte $a_n \to a, b_n \to b$ mit $n \to \infty$.

a) Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $(\lambda a_n + \mu b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert
$\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda a + \mu b.$

b) Die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit Grenzwert
$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b.$

c) Falls $b \neq 0$, so gibt es ein $N_0 \in \mathbb{R}$ mit $b_n \neq 0$ für $n > N_0$ und die Folge $(a_n/b_n)_{n>N_0}$ ist konvergent mit Grenzwert
$\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = a/b.$

Satz 1.4 (Grenzwerte und Ungleichungen)

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, mit Grenzwerten $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gelten folgende Aussagen:

a) Ist $a_n \leq b_n$ für alle n, so folgt $a \leq b$.

b) Gilt $c \leq a_n \leq d$ für alle n mit $c, d \in \mathbb{R}$, so folgt $c \leq a \leq d$.

c) Ist $a_n \leq c_n \leq b_n$ und gilt $a = b$, so konvergiert auch die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a = b$.

Beispiel 1.9 (n-te Wurzel)

Hier betrachten wir für $a > 0$ *und* $n \in \mathbb{N}$ *die Gleichung* $x^n = a$. *Es gibt höchstens eine Lösung* $x > 0$, *denn für* $x, y > 0$ *mit* $x > y$ *folgt* $x^n > y^n$, *oder*

$$x, y > 0 \text{ und } x^n \leq y^n \quad \Rightarrow \quad x \leq y.$$

Die Existenz der Lösung wird im nächsten Kapitel aus dem Vollständigkeitsaxiom hergeleitet. Damit gibt es genau eine Lösung $x > 0$, *die mit* $a^{1/n}$ *oder* $\sqrt[n]{a}$ *bezeichnet wird, und es gilt*

$$a, b > 0 \text{ und } a \leq b \quad \Rightarrow \quad a^{1/n} \leq b^{1/n}. \tag{1.2}$$

Wir behaupten nun

$$\lim_{n \to \infty} a^{1/n} = 1.$$

BEWEIS: Für $a \geq 1$ ist $a^{1/n} \geq 1$ nach (1.2). Wir setzen $\xi_n = a^{1/n} - 1 \geq 0$ und schließen aus der Bernoulli-Ungleichung,

$$a = (1 + \xi_n)^n \geq 1 + n\xi_n \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \xi_n \leq (a-1)/n.$$

Also folgt $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$ bzw. $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$ mit Satz 1.4 c).

Für $a < 1$ gilt

$$\left(a^{1/n} \cdot (a^{-1})^{1/n}\right)^n = a \cdot a^{-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad a^{1/n} = \frac{1}{(a^{-1})^{1/n}},$$

und die Behauptung folgt aus dem vorigen Fall mit Satz 1.3 c). $\square$

Definition 1.6 (Uneigentliche Konvergenz)

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich (oder divergiert bestimmt) gegen $+\infty$, falls gilt:

Zu jedem $K > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{R},$ so dass $a_n > K$ für alle $n > N$.

Wir schreiben $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ oder $a_n \to +\infty$ mit $n \to \infty$.

Uneigentliche Konvergenz gegen $-\infty$ ist analog definiert.

Beispiel

Für $q > 1$ *gilt* $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$. *Denn zu gegebenem* $K > 0$ *gibt es nach Beispiel 1.4 ein* $N \in \mathbb{R}$ *mit* $(1/q)^n < 1/K$ *für* $n > N$, *also* $q^n > K$ *für* $n > N$. *Insgesamt haben wir für das Verhalten der Folge* q^n *mit* $n \to \infty$ *folgende Tabelle:*

$$\begin{aligned} q > 1 \quad &\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} q^n = +\infty, \\ q = 1 \quad &\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 1, \\ -1 < q < 1 \quad &\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0, \\ q \leq -1 \quad &\Rightarrow \quad (q^n) \text{ nicht konvergent.} \end{aligned}$$

Der Fall $-1 < q < 1$ *wurde in Beispiel 1.4 behandelt, und der Fall* $q \leq -1$ *folgt mit etwas Überlegung aus Beispiel 1.5 (Übungsaufgabe).*

Für eine Folge mit $a_n > 0$ für alle n ist $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ äquivalent zu $\lim_{n\to\infty} 1/a_n = 0$ (Übungsaufgabe).

Zum Schluss dieses Abschnitts führen wir noch folgende Bezeichnungen für Teilmengen von $\mathbb{R}$ ein:

$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}: a<x<b\}$	offenes Intervall
$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}: a\leq x\leq b\}$	abgeschlossenes Intervall
$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}: a\leq x< b\}$	rechtsseitig offen, linksseitig abgeschloss
$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}: a< x\leq b\}$	linksseitig offen, rechtsseitig abgeschloss
$\lvert I\rvert=b-a$ für ein Intervall I	Intervalllänge

Hierbei sind $+\infty$ und $-\infty$ als offene Intervallgrenzen zugelassen, zum Beispiel ist $(-\infty,1]=\{x\in\mathbb{R}: -\infty<x\leq 1\}$. Den ε-Umgebungen bei der Definition der Konvergenz entsprechen bei uneigentlicher Konvergenz gegen $+\infty$ die Intervalle $(K,+\infty)$: ab einem gewissen Index müssen alle Folgenglieder in $(K,+\infty)$ liegen, egal wie groß K gewählt ist.

Die bisher eingeführten Axiome (K) sowie (A1) bis (A3) gelten selbstverständlich auch für die rationalen Zahlen. Dennoch sind die rationalen Zahlen für die Analysis ungeeignet. Wir beginnen mit folgender Beobachtung der Pythagoräer.

Satz 2.1 (Irrationalität von $\sqrt{2}$)

$x^2 = 2$ ist in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar.

Beweis: (durch Widerspruch) Angenommen, die Gleichung $x^2 = 2$ hat eine rationale Lösung, also $x = p/q$ mit $p, q \in \mathbb{N}$. Durch fortgesetztes Kürzen können wir annehmen, dass höchstens eine der Zahlen p und q gerade ist. Nun gilt

$$p^2 = 2q^2 \quad \Rightarrow \quad p^2 \text{ gerade} \quad \Rightarrow \quad p \text{ gerade} \quad \Rightarrow \quad p = 2p_1 \text{ mit } p_1 \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt weiter $2q^2 = 4p_1^2 \Rightarrow q^2$ gerade $\Rightarrow q$ gerade. Also sind doch p, q beide gerade, ein Widerspuch. $\square$

In $\mathbb{R}$ ist die Gleichung $x^2 = 2$ und allgemeiner die Gleichung $x^n = a$ für beliebige $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$ lösbar.

Das Ziel der Analysis ist es, neue Objekte – Zahlen, Funktionen, Operationen – durch Grenzprozesse zu konstruieren. Unsere Definition des Grenzwerts setzt voraus, dass wir den Grenzwert der Folge bereits kennen. Das Vollständigkeitsaxiom muss die Existenz von Grenzwerten in Situationen garantieren, in denen der Grenzwert a priori nicht bekannt ist. Wir betrachten hierzu zwei Beispiele.

Beispiel 2.1 (Zinseszinsrechnung)

Wird ein Euro für ein Jahr mit einem Zinssatz x *angelegt, so beträgt die Ausszahlung* $E_1(x) = 1 + x$. *Die Idee des Zinseszinses ist es, den Zeitraum in kürzere Abschnitte zu unterteilen und den Zins anteilig pro Abschnitt anzurechenen mit dem Effekt, dass der schon angerechnete Teil des Zinses seinerseits Zinsen produziert. Zum Beispiel ergibt das bei monatlicher Verzinsung nach einem Monat* $1 + \frac{x}{12}$, *nach zwei Monaten* $(1 + \frac{x}{12})(1 + \frac{x}{12}) = (1 + \frac{x}{12})^2$, *und nach zwölf Monaten* $E_{12}(x) = (1 + \frac{x}{12})^{12}$. *Allgemein ergibt sich nach einem Jahr bei Unterteilung in* n *Zeiteinheiten*

$$E_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad \text{für } x \in \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Es stellt sich ganz natürlich die Frage nach einer kontinuierlichen Verzinsung, also nach dem Grenzwert $\lim_{n\to\infty} E_n(x)$.

Beispie 2.2 (Dezimalbruchdarstellung)

Für $a \in \mathbb{R}$ gibt es $k_0 \in \mathbb{Z}$ und $k_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ für $j \in \mathbb{N}$, so dass folgende Darstellung als unendlicher Dezimalbruch gilt:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{mit} \quad a_n = \sum_{j=0}^{n} k_j \cdot 10^{-j} = k_0, k_1 k_2 \ldots k_n.$$

Um das zu zeigen, definieren wir induktiv

$$a_n = a_{n-1} + k_n \cdot 10^{-n}$$

mit

$$a_n \leq a < a_n + 10^{-n}.$$

Für $n = 0$ setzen wir $k_0 = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq a\}$ und haben wie gewünscht

$$a_0 = k_0 \leq a < k_0 + 1 = a_0 + 10^{-0}.$$

Sind $k_0, k_1, \dots, k_n$ bereits gefunden für ein $n \in \mathbb{N}$, so definieren wir $k_{n+1} = \max\{k \in \mathbb{Z} : a_n + k \cdot 10^{-(n+1)} \leq a\}$. Nach Induktionsannahme gilt $a_n \leq a < a_n + 10 \cdot 10^{-(n+1)}$ und folglich $k_{n+1} \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Weiter liefert die Wahl von k_{n+1}

$$\begin{aligned} a_{n+1} = a_n + k_{n+1} \cdot 10^{-(n+1)} \leq a \quad &< \quad a_n + (k_{n+1} + 1) \cdot 10^{-(n+1)} \\ &= \quad a_{n+1} + 10^{-(n+1)}. \end{aligned}$$

Die Darstellung als unendlicher Dezimalbruch gilt wegen

$$|a - a_n| \leq 10^{-n} \to 0 \text{ mit } n \to \infty.$$

Umgekehrt stellt sich aber nun die Frage, ob jede Dezimalbruchfolge $a_n = k_0, k_1 k_2 \dots k_n$ gegen eine gewisse, reelle Zahl konvergiert.

In beiden Beispielen brauchen wir wie gesagt eine Charakterisierung konvergenter Folge, die ohne die Kenntnis des Grenzwerts auskommt. Die Idee von Augustin Louis Cauchy (1789–1857) besteht darin, die Glieder der Folge nicht mit dem unbekannten Grenzwert, sondern *untereinander* zu vergleichen.

Definition 2.1 (Cauchyfolge)

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchyfolge, wenn gilt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{R}$, so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m > N$.

Beim Nachweis dieser Eigenschaft reicht es aus, die Zahlen $n, m > 0$ mit $n < m$ zu betrachten, denn die Definition ist symmetrisch in n und m und für $n = m$ ist nichts zu tun.

Vollständigkeitsaxiom

(V) Jede Cauchyfolge ist konvergent.

Damit sind die Axiome (KAV) der reellen Zahlen komplett. Je nach Autor werden auch andere Aussagen als Vollständigkeitsaxiom zugrunde gelegt, die aber natürlich äquivalent sind und sich bei uns als Folgerungen ergeben werden.

Satz 2.2

Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

Beweis: Eine Cauchyfolge ist konvergent nach dem Vollständigkeitsaxiom. Sei umgekehrt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon/2$ für $n > N$, und für $n, m > N$ folgt

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

Als erste Anwendung der Vollständigkeit betrachten wir die Dezimaldarstellung und zeigen

Satz 2.3 (Konvergenz von Dezimalbrüchen)

Seien $k_0 \in \mathbb{Z}$ und $k_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ für $j \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert der Dezimalbruch $a_n = \sum_{j=0}^{n} k_j \cdot 10^{-j}$ gegen eine reelle Zahl.

BEWEIS: Für $n < m$ schätzen wir wie folgt ab, wobei wir die Formel für die geometrische Reihe, Beispiel 1.8 und Beispiel 1.4 verwenden:

$$|a_m - a_n| = \sum_{j=n+1}^{m} k_j \cdot 10^{-j} \leq 10^{-(n+1)} \sum_{j=0}^{\infty} 9 \cdot 10^{-j} \leq 10^{-n} < \varepsilon \text{ für } n > N.$$

(a_n) ist damit eine Cauchyfolge, und konvergiert gegen eine reellen Zahl nach (V). $\square$

Als zweite Anwendung definieren wir die Eulersche Zahl e, und betrachten dazu die Folge

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ und $m > n$ berechnen wir

$$\begin{aligned} a_m - a_n &= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(n+2)\cdot \ldots \cdot (n+m-n)}\right) \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \ldots + 2^{m-n-1}\right). \end{aligned}$$

Mit der Formel für die geometrische Reihe, siehe Beispiel 1.8, folgt die Abschätzung

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq a_m - a_n \leq \frac{2}{(n+1)!} \quad \text{für } m > n. \tag{2.2}$$

Da $1/(n+1)! \leq 1/(n+1) \to 0$ mit $n \to \infty$, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{R}$ mit

$$|a_m - a_n| \leq \frac{2}{(n+1)!} < \varepsilon \quad \text{für } n, m > N.$$

(a_n) ist eine Cauchyfolge.

Aus dem Vollständigkeitsaxiom folgt die Existenz des Grenzwerts $\lim_{n\to\infty} a_n$, so dass folgende Definition sinnvoll ist.

Definition 2.2 (Eulersche Zahl)

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Satz 2.4 (Irrationalität der Eulerschen Zahl)

$e = \sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$ ist nicht rational.

BEWEIS: Aus Abschätzung (2.2) folgt mit $m \to \infty$

$$\frac{1}{(n+1)!} \le e - a_n \le \frac{2}{(n+1)!} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Nach Multiplikation mit $n!$ ergibt sich hieraus für $n \ge 2$

$$0 < \frac{1}{n+1} \le n!\, e - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \le \frac{2}{(n+1)} < 1.$$

Wäre e rational, so wäre der mittlere Term eine ganze Zahl für n hinreichend groß, ein Widerspruch. □