Analysis I

Guofang Wang

Universität Freiburg

15.11.2016

Definition 2.1 (Cauchyfolge)

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchyfolge, wenn gilt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{R}$, so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m > N$.

Definition 1.1 (Konvergenz von Folgen)

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit $n \to \infty$ gegen $a \in \mathbb{R}$, falls gilt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{R}$, so dass für alle $n > N$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Vollständigkeitsaxiom

(V) Jede Cauchyfolge ist konvergent.

Damit sind die Axiome (KAV) der reellen Zahlen komplett.

Satz 2.2

Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

Satz 2.3 (Konvergenz von Dezimalbrüchen)

Seien $k_0 \in \mathbb{Z}$ *und* $k_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ *für* $j \in \mathbb{N}$. *Dann konvergiert der Dezimalbruch* $a_n = \sum_{j=0}^{n} k_j \cdot 10^{-j}$ *gegen eine reelle Zahl.*

Definition 2.2 (Eulersche Zahl)

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Satz 2.4 (Irrationalität der Eulerschen Zahl)

$e = \sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$ *ist nicht rational.*

BEWEIS: $\frac{1}{(n+1)!} \leq e - a_n \leq \frac{2}{(n+1)!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Das nun folgende Konvergenzkriterium ist überaus nützlich. Es ist ein *hinreichendes* Kriterium für Konvergenz, ist aber nicht notwendig für die Konvergenz einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definition 2.3 (Monotone Folge)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt monoton wachsend, wenn

$$a_{n+1} \geq a_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Manche Autoren bezeichnen diese Eigenschaft auch als nichtfallend, und reservieren den Begriff wachsend für eine Folge mit $a_{n+1} > a_n$. Das bezeichnen wir als *streng monoton wachsend*.

Satz 2.5 (Konvergenzkriterium der Monotonie und Beschränktheit)

Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge ist eine Cauchyfolge und damit konvergent.

BEWEIS: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und $a_n \leq K < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $\varepsilon > 0$ betrachte

$$M = \{j \in \mathbb{N}_0 : \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } a_n \geq a_1 + j\varepsilon\}.$$

Offenbar ist $0 \in M$, und für $j \in M$ gilt $j \leq (K - a_1)/\varepsilon$. Sei $k \in M$ maximal. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_N \geq a_1 + k\varepsilon$, und für alle $n \geq N$ folgt

$$a_1 + k\varepsilon \leq a_N \leq a_n < a_1 + (k+1)\varepsilon.$$

Damit gilt $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$ für $n, m \geq N$, das heißt (a_n) ist eine Cauchyfolge. $\square$

Beispiel 2.3 (Die Zahl e und Zinsrechnung)

Zu diesem Zeitpunkt ist nicht einsichtig, warum zur Definition der Eulerschen Zahl die Formel $e = \sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$ gewählt wurde. Darum zeigen wir nun die alternative und vielleicht aus der Schule bekannte Darstellung

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{2.3}$$

Mit anderen Worten: wenn ein Euro für ein Jahr mit Zinssatz $x = 1$ bzw. 100 Prozent kontinuierlich verzinst wird, ist das Endkapital $e \approx 2,71828\ldots$ Euro, statt 2 Euro bei jährlicher Verzinsung, vergleiche Beispiel 2.1.

Zum Beweis von (2.3) bemerken wir zunächst, dass die Folge $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/n}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt ist; dies wird in Aufgabe 1, Serie 6, gezeigt. Nach Satz 2.5 existiert der Grenzwert $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Mit dem Binomischen Lehrsatz erhalten wir

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\ \frac{n}{n}\frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = a_n.$$

Mit $n \to \infty$ folgt $b \leq e$ nach Satz 1.4. Die umgekehrte Abschätzung ist etwas subtiler: für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ und $n \geq m$ gilt, da die Summanden größer gleich Null sind,

$$b_n \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\ \frac{n}{n}\frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n}.$$

Indem wir hier $n \to \infty$ gehen lassen, folgt mit Satz 1.4

$$b \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!},$$

und $m \to \infty$ liefert $b \geq e$ und damit $b = e$ wie gewünscht.

Als nächste Anwendung des Vollständigkeitsaxioms diskutieren wir nun das Intervallschachtelungsprinzip.

Definition 2.4 (Intervallschachtelung)

Eine Intervallschachtelung ist eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ mit $I_{n+1} \subset I_n$ für alle n und $|I_n| = b_n - a_n \to 0$ mit $n \to \infty$.

Satz 2.6 (Intervallschachtelungsprinzip)

Zu jeder Intervallschachtelung $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Es gilt $x = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Beweis: (Existenz) Nach Voraussetzung haben wir

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le \ldots \quad \ldots \le b_n \le \ldots \le b_2 \le b_1.$$

Aus Satz 2.5 folgt die Existenz der Grenzwerte $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ bzw. $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Dann gilt nach den Satz 1.3 und Satz 1.4

$$0 \le b - a = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0.$$

Setze $x := a = b$. Dann ist $a_n \le a = x = b \le b_n$, also $x \in I_n$ für alle n.

(Eindeutigkeit) Sei $y \in \mathbb{R}$ mit $y \in I_n$ für alle n, das heißt $a_n \le y \le b_n$. Durch Grenzübergang ergibt sich nach Satz 1.4 $a \le y \le b$, also $y = x$. $\square$

Satz 2.7 (Existenz der n-ten Wurzel)

Zu jedem $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $x > 0$ mit $x^n = a$.
Bezeichnung: $x = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$.

Beweis: Die Eindeutigkeit wurde schon in Beispiel 1.9 aus den Anordnungsaxiomen gefolgert. Wir konstruieren die Lösung mit dem Verfahren der fortgesetzten Intervallhalbierung:
Bestimme $I_k = [a_k, b_k]$ für $k = 1, 2, \ldots$, so dass mit $m_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ gilt:

$$I_1 = [a_1, b_1] \text{ mit } a_1^n \le a \le b_1^n;$$

$$I_{k+1} = \begin{cases} [a_k, m_k] & \text{falls } m_k^n \ge a \\ [m_k, b_k] & \text{falls } m_k^n < a. \end{cases}$$

Es folgt $I_{k+1} \subset I_k$ für alle k und $|I_k| = 2^{1-k}|I_1| \to 0$ mit $k \to \infty$. Sei $x \in \mathbb{R}$ wie in Satz 2.6 gegeben. Per Induktion ergibt sich aus der Definition von I_{k+1} die Ungleichung $a_k^n \le a \le b_k^n$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und hieraus mit den Sätzen 1.3 und 1.4

$$x^n = \lim_{n\to\infty} a_k^n \le a \le \lim_{n\to\infty} b_k^n = x^n.$$

Für rationale Exponenten $r = p/q$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ wird die Potenz erklärt durch $a^r = (a^p)^{1/q}$. Dies ist wohldefiniert, denn aus $p_1/q_1 = p_2/q_2$ folgt

$$\begin{aligned} \left(\left(a^{p_1}\right)^{1/q_1}\right)^{q_1 q_2} &= \left(\left(\left(a^{p_1}\right)^{1/q_1}\right)^{q_1}\right)^{q_2} = \left(a^{p_1}\right)^{q_2} = a^{p_1 q_2} = a^{p_2 q_1} \\ &= \left(\left(a^{p_2}\right)^{1/q_2}\right)^{q_1 q_2}, \end{aligned}$$

also $(a^{p_1})^{1/q_1} = (a^{p_2})^{1/q_2}$.
Weiter zeigt man leicht die Potenzgesetze (für ganzzahlige Exponenten sind diese Regeln klar und wurden schon benutzt)

$$(i)\ a^s a^r = a^{r+s} \quad (ii)\ (a^r)^s = a^{rs} \quad (iii)\ a^r b^r = (ab)^r.$$

(Übungsaufgabe).

Definition 2.5 (Teilfolge)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $n_1 < n_2 < n_3 \ldots$ Dann heißt die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Durch Induktion ergibt sich sofort $n_k \geq k$: es ist $n_1 \geq 1$ und $n_{k+1} \geq n_k + 1 \geq k+1$. Die Teilfolge entsteht aus der ursprünglichen Folge durch *Auswahl der Nummern* n_k. Da Folgen Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$ sind, ist eine Teilfolge formal als Verkettung von zwei Abbildungen definiert:
der Ausgangsfolge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \longmapsto a_n$ und
der Folge $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \longmapsto n_k$, die die Indizes auswählt.
Am Beispiel $a_n = (-1)^n/n^3$ und $n_k = 2k-1$ sieht das wie folgt aus:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{n_k=2k-1} & \mathbb{N} & \xrightarrow{a_n=(-1)^n/n^3} & \mathbb{R} \\ k & \longmapsto & n_k = 2k-1 & \longmapsto & a_{n_k} = -1/(2k-1)^3 \end{array}$$

Defintion 2.6 (Häufungspunkt von Folgen)

$a \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gibt, die mit $k \to \infty$ gegen a konvergiert.

Beispielsweise hat die Folge $a_n = (-1)^n + 1/n^2$ den Häufungspunkt $+1$. Denn mit $n_k = 2k$ gilt $a_{n_k} = a_{2k} = 1 + 1/(2k)^2 \to 1$ mit $k \to \infty$.

Auch -1 ist ein Häufungspunkt der Folge, denn für $n_k = 2k-1$ ist $a_{n_k} = a_{2k-1} = -1 + 1/(2k-1)^2 \to -1$ mit $k \to \infty$.

Lemma 2.1

Die Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist genau dann Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbb{N} : a_n \in U_\varepsilon(a)\}$ unendlich viele Elemente hat.

BEWEIS: Wenn $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, so gilt nach Definition $a_{n_k} \to a$ mit $k \to \infty$ für eine Teilfolge n_k. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $K \in \mathbb{R}$ mit $a_{n_k} \in U_\varepsilon(a)$ für alle $k > K$. Die Abbildung $k \mapsto n_k$ ist injektiv wegen $n_1 < n_2 < \ldots$, also ist die Menge $\{n_k : k > K\}$ nicht endlich nach dem Schubfachprinzip. Dies beweist die eine Richtung der Äquivalenz.

Umgekehrt wählen wir induktiv n_k mit $n_1 < n_2 < \ldots$, so dass $a_{n_k} \in U_{1/k}(a)$. Die Induktion bricht nicht ab, da $a_n \in U_{1/k}(a)$ für unendlich viele n gilt. Es folgt dann $|a_{n_k} - a| < 1/k \to 0$ mit $k \to \infty$. $\square$

Satz 2.8 (Bolzano-Weierstraß)

Jede beschränkte Folge reeller Zahlen hat eine konvergente Teilfolge, also mindestens einen Häufungspunkt.

Beweis: Konstruktion durch fortgesetzte Intervallhalbierung: wähle eine obere Schranke b_1 und eine untere Schranke a_1 für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, also $x_n \in [a_1, b_1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen nun induktiv an, dass $I_k = [a_k, b_k]$ schon gefunden ist mit der Eigenschaft

$$(*) \quad x_n \in I_k \quad \text{für unendlich viele } n.$$

Setze $m_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$ und definiere

$$I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [m_k, b_k], & \text{falls } x_n \in [m_k, b_k] \text{ für unendlich viel} \\ [a_k, m_k] & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist offensichtlich, dass $(*)$ auch für das Intervall I_{k+1} gilt.

Nach dem Intervallschachtelungsprinzip aus Satz 2.6 gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in I_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nun ein $K \in \mathbb{R}$ mit $|I_k| < \varepsilon$ für $k > K$, also $I_k \subset U_\varepsilon(x)$ für $k > K$. Damit gilt auch $x_n \in U_\varepsilon(x)$ für unendlich viele n. Aus Lemma 2.1 schließen wir, dass x ein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. $\square$

Definition 2.7 (Limes superior/inferior)

Für eine reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $x^* \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ gilt $\limsup_{n\to\infty} x_n = x^*$, falls folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

(i) es gibt eine Teilfolge x_{n_k} mit $x_{n_k} \to x^*$ für $k \to \infty$,

(ii) für alle $x > x^*$ ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} : x_n > x\}$ endlich.

Entsprechend bedeutet $\liminf_{n\to\infty} x_n = x_*$ mit $x_* \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$:

(i) es gibt eine Teilfolge x_{n_k} mit $x_{n_k} \to x_*$ für $k \to \infty$,

(ii) für alle $x < x_*$ ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} : x_n < x\}$ endlich.

Der Limes superior ist nicht notwendig obere Schranke der Folge, zum Beispiel gilt $\limsup_{n\to\infty} 1/n = 0$.

Er kann auch $-\infty$ sein, zum Beispiel für $x_n = -n$.

Während wir den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n$ nur dann bilden können, wenn die Folge konvergiert, ist
der größte Häufungspunkt $x^* = \limsup_{n\to\infty} x_n$
und
der kleinste Häufungspunkt $x_* = \liminf_{n\to\infty} x_n = x_*$
immer definiert, wenn wir jeweils die Möglichkeit $x^* = \pm\infty$ bzw. $x_* = \pm\infty$ zulassen.

Dies soll nun bewiesen werden, wobei wir uns o.B.d.A. auf den Limes superior beschränken.

Lemma 2.2

Sei $\limsup_{n\to\infty} x_n = x^* < \infty$. *Dann gilt*

$$x > x^* \quad \Rightarrow \quad x \text{ ist kein Häufungspunkt von } (x_n).$$

Beweis: Setze $\varepsilon = \frac{1}{2}(x - x^*) > 0$. Für $y \in U_\varepsilon(x)$ folgt $y - x^* = x - x^* - (x - y) > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$, mit anderen Worten $U_\varepsilon(x) \subset \{y \in \mathbb{R} : y > x^* + \varepsilon\}$. Nach Definition 2.7 (ii) ist $x_n \in U_\varepsilon(x)$ nur für endlich viele $n \in \mathbb{N}$, das heißt x ist kein Häufungspunkt nach Lemma 2.1 □

Satz 2.9 (Existenz des Limes superior)

Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{R}}$ gibt es genau ein $x^* \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $\limsup_{n\to\infty} x_n = x^*$.

BEWEIS:

Fall 1: (x_n) ist nicht nach oben beschränkt.
Dann ist $\{n : x_n \geq b\}$ unendlich für alle $b \in \mathbb{R}$. Bestimme induktiv $n_1 < n_2 < \ldots$ mit $x_{n_k} \geq k$. Es folgt $\limsup_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Fall 2: Es gibt ein $b_1 \in \mathbb{R}$ mit $x_n \leq b_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Fall 2.1: $\{n : x_n \geq a\}$ ist endlich für alle $a \in \mathbb{R}$.
Dann gilt $x_n \to -\infty$ und es folgt $\limsup_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Fall 2.2: Es gibt ein $a_1 \in \mathbb{R}$, so dass $\{n : x_n \in [a_1, b_1]\}$ unendlich ist.

In diesem Fall wenden wir das Intervallhalbierungsverfahren aus dem Beweis von Satz 2.8 an und behaupten

$\{n : x_n > b_k\}$ ist endlich für alle k.

Für $k = 1$ ist das richtig, da b_1 obere Schranke. Sei die Behauptung schon für $k \in \mathbb{N}$ gezeigt.

$b_{k+1} = b_k \quad \Rightarrow \quad$ Die Behauptung gilt nach Induktionsannahme.

$b_{k+1} = m_k \quad \Rightarrow \quad$ Die Menge $\{n : x_n > b_{k+1}\}$
$= \{n : x_n \in (m_k, b_k]\} \cup \{n : x_n > b_k\}$
ist endlich nach Fallunterscheidung sowie Induktionsa

Sei nun $x^* := \lim_{k\to\infty} b_k$. Für $x > x^*$ ist $(x, +\infty) \subset (b_k, +\infty)$ für k hinreichend groß, also ist $\{n : x_n > x\}$ endlich und es folgt $\limsup_{n\to\infty} x_n = x^*$. Damit ist die Existenz bewiesen.

Angenommen es gibt $x_1^* < x_2^*$ mit den Eigenschaften (i) und (ii). Wähle $x \in (x_1^*, x_2^*)$. Wegen (ii) für x_1^* ist dann $\{n : x_n > x\}$ endlich. Dann kann aber (i) für x_2^* nicht gelten, ein Widerspruch. $\square$

Die Begriffe Häufungspunkt, Limes superior und Limes inferior sind gewöhnungsbedürftig, und wir werden bei Gelegenheit mehr Beispiele betrachten.

Die logische Abfolge der *zentralen theoretischen Aussagen* in diesem Abschnitt war folgende:

Vollständigkeitsaxiom:
Cauchyfolgen sind konvergent

$\Downarrow$

Konvergenzkriterium der
Monotonie und Beschränktheit

$\Downarrow$

Intervallschachtelungsprinzip

$\Downarrow$

Bolzano-Weierstraß: Auswahlsatz

$\Downarrow$

Cauchyfolgen sind konvergent

Die Implikationen sind so zu verstehen, dass jeweils nur die jeweils vorangehende Eigenschaft von $\mathbb{R}$ im Beweis des darauf folgenden Resultats benutzt wurde. Die letzte Implikation werden wir dabei gleich noch zeigen. Es folgt, dass jede der vier Eigenschaften als Axiom für $\mathbb{R}$ benutzt werden könnte - die anderen Eigenschaften würden als Sätze folgen. Im nächsten Abschnitt werden wir eine weitere, äquivalente Eigenschaft kennenlernen, nämlich den Satz vom Supremum (Satz 2.9). In dieser Vorlesung wird die Konvergenz der Cauchyfolgen als grundlegendes Axiom gewählt.

Beweis: *Auswahlsatz von Bolzano-Weierstraß $\Rightarrow$ Cauchyfolgen sind konvergent*

Wir zeigen zunächst, dass eine Cauchyfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| \leq 1$ für $n, m \geq n_0$. Dann folgt

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| \leq \underbrace{|a_n - a_{n_0}|}_{\leq 1} + |a_{n_0}|.$$

Also gilt $|a_n| \leq \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|, |a_{n_0}| + 1) = K$. Sei nun $N \in \mathbb{R}$ mit $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n, m > N$. Wir wenden den Auswahlsatz von Bolzano-Weierstraß an: es gibt eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_{n_k} \to a$ mit $k \to \infty$. Wähle $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_{k_0}} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $n_{k_0} > N$. Für $n > N$ folgt

$$|a_n - a| \leq \underbrace{|a_n - a_{n_{k_0}}|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_{n_{k_0}} - a|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon.$$

Somit konvergiert die ganze Folge gegen a. $\square$

Definition 2.8

Die Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt

$$\begin{aligned} \text{nach oben beschränkt} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists K \in \mathbb{R} \text{ mit } x \leq K \text{ für alle } x \in M, \\ \text{nach unten beschränkt} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists K \in \mathbb{R} \text{ mit } x \geq K \text{ für alle } x \in M. \end{aligned}$$

Die Zahl K heißt dann obere bzw. untere Schranke. Weiter heißt M beschränkt $\Leftrightarrow \exists K \geq 0$ mit $|x| \leq K$ für alle $x \in M$.

Eine Menge ist genau dann beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist. Denn aus $|x| \leq K$ folgt $-K \leq x \leq K$, und aus $K_1 \leq x \leq K_2$ folgt umgekehrt $|x| \leq \max(|K_1|, |K_2|)$.

Beispiel 2.4

Die Menge $[0,1)$ ist nach oben beschränkt, eine obere Schranke ist zum Beispiel $K = 2016$. Es gibt in $[0,1)$ kein größtes Element, denn es gilt der Schluss $x \in [0,1) \quad \Rightarrow \quad x < \frac{x+1}{2} \in [0,1)$. Unter den oberen Schranken von $[0,1)$ gibt es aber eine kleinste, nämlich die Zahl 1.

Definition 2.9 (Supremum/Infimum)

Die Zahl $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ heißt Supremum (bzw. Infimum) der Menge $M \subset \mathbb{R}$, wenn folgendes gilt:

(1) $x \leq a$ für alle $x \in M$ (bzw. $x \geq a$ für alle $x \in M$),

(2) Für alle $a' < a$ (bzw. $a' > a$) gibt es ein $x \in M$ mit $x > a'$ (bzw. $x < a'$).

Notation: $a = \sup M$ (bzw. $a = \inf M$).

Ist M nach oben (bzw. unten) beschränkt, so bezeichnen wir $\sup M$ auch als kleinste obere Schranke (bzw. $\inf M$ als größte untere Schranke).

Satz 2.10

Jede Menge $M \subset \mathbb{R}$ hat genau ein Supremum $S \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Beweis: Wir zeigen als erstes die Eindeutigkeit. Angenommen es gibt $S_{1,2} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, die beide die Definition 2.9 erfüllen. Wir können $S_1 < S_2$ annehmen. Nach Eigenschaft (2) bzgl. S_2 gibt es ein $x \in M$ mit $x > S_1$, im Widerspruch zur Eigenschaft (1) bezüglich S_1.

Man sieht leicht $\sup \emptyset = -\infty$, und $\sup M = +\infty$ falls M nicht nach oben beschränkt ist. Im verbleibenden Fall wählen wir ein Element a_1 von M und eine obere Schranke b_1 von M, und konstruieren wie folgt eine Intervallschachtelung $I_n = [a_n, b_n]$ für $n \geq 1$, wobei $m_n = (a_n + b_n)/2$:

$$I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [m_n, b_n], & \text{falls } [m_n, b_n] \cap M \neq \emptyset \\ [a_n, m_n], & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach dem Intervallschachtelungsprinzip, Satz 2.6, gibt es genau ein $S \in \mathbb{R}$ mit $S \in I_n$ für alle n, und genauer gilt $a_n \to S$ sowie $b_n \to S$. Für $x \in M$ sieht man durch Induktion $x \leq b_n$ für alle n, also $x \leq \lim_{n\to\infty} b_n = S$. Andererseits gilt, ebenfalls induktiv, $M \cap I_n \neq \emptyset$ für alle n, das heißt es gibt $x_n \in M$ mit $a_n \leq x_n \leq b_n$. Ist $S' < S$, so gilt also $x_n > S'$ für hinreichend große n. Damit ist $\sup M = S$ gezeigt. $\square$

Folgerung 2.1

Sei $M \subset \mathbb{R}$ nichtleer. Dann gibt es eine Folge $x_n \in M$ (bzw. $x'_n \in M$) mit $x_n \to \sup M$ (bzw. $x'_n \to \inf M$).

BEWEIS: Wir zeigen die Aussage für das Supremum. Ist M nach oben beschränkt, so wurde eine solche Folge im Beweis des vorangehenden Satzes konstruiert. Ist M nicht nach oben beschränkt, so gibt es zu $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in M$ mit $x_n \geq n$, also $x_n \to +\infty = \sup M$. □