Analysis I

Guofang Wang

Universität Freiburg

22.11.2016

Definition

Die komplexe Zahlen sind definiert als $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, mit

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2) \end{aligned}$$

für alle $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

Satz

$\mathbb{C}$ is ein Körper.

Auf $\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ gibt es keine Ordnung " $>$ "

Die Addition ist die Vektorraumaddition von $\mathbb{R}^2$. Die Standardbasis wird mit

$$(1,0) = 1 \quad \text{und} \quad (0,1) = i$$

bezeichnet, das heißt jedes $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ besitzt die Basisdarstellung $z = x + iy$. Damit lautet die Addition von $x_k + iy_k$, $k = 1, 2$,

$$\begin{aligned}(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2)\\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\\ &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).\end{aligned}$$

Mit diesen Vereinbarungen gilt $x = x + i0 = (x, 0)$ für $x \in \mathbb{R}$, das heißt $\mathbb{R}$ wird mit der x-Achse in $\mathbb{R}^2$ identifiziert.
Für $z = x + iy$ heißt
$x =: \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$ der Realteil und
$y =: \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$ der Imaginärteil von z.

Multiplikation der komplexen Zahlen

Die Multiplikation ergibt sich durch die Forderung $i^2 = -1$ und Ausmultiplizieren nach den Körpergesetzen:

$$\begin{aligned}(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) &= x_1x_2 + i^2 y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1) \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1).\end{aligned}$$

Insbesondere,

$$i(x, y) = i(x + iy) = -y + ix = (-y, x).$$

Der Vektor $(-y, x)$ entsteht anschaulich aus (x, y) durch Drehung um $90°$ im mathematisch positiven Sinn, das heißt gegen den Uhrzeigersinn.

Um das inverse Element der Multiplikation anzugeben, ist ein weiterer Begriff nützlich:

für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ heißt $\overline{z} = x - iy \in \mathbb{C}$ die zu z konjugiert komplexe Zahl.
Anschaulich ergibt sich $\overline{z}$ aus z durch Spiegelung an der x-Achse, insbesondere gilt $\overline{\overline{z}} = z$.

Lemma 3.3

Für die komplexe Konjugation gelten folgende Regeln:

(1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$,

(2) $\overline{z} = z \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R}$,

(3) Für $z = x + iy$ ist $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ und $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

Beweis: Die Beweise erfolgen alle durch Nachrechnen, zum Beispiel gilt

$$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + y_1x_2) = \overline{z_1 z_2}.$$

Die komplexen Zahlen entstehen aus $\mathbb{R}^2$ durch Hinzunahme der Multiplikation als zusätzliche Struktur. Man nennt die Euklidische Norm

$$|z| = \sqrt[+]{x^2 + y^2} \quad \text{für } z = x + iy$$

auch den Betrag der komplexen Zahl z.

Lemma 3.4

Für den Betrag einer komplexen Zahl gelten folgende Regeln:

(1) $|z|^2 = z\,\overline{z}$.

(2) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

(3) $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}\,(z)| \leq |z|$.

Damit können wir nun das inverse Element der Multiplikation leicht hinschreiben, und zwar folgt aus Lemma 3.4(1) für $z = x + iy \neq 0$

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\,\overline{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Lemma 3.4

Für den Betrag einer komplexen Zahl gelten folgende Regeln:

(1) $|z|^2 = z\,\overline{z}$.

(2) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

(3) $|\mathrm{Re}\, z| \le |z|$, $|\mathrm{Im}\,(z)| \le |z|$.

BEWEIS: Für Aussage (1) berechnen wir mit $z = x + iy$

$$z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Die Formel (2) folgt aus (1), Lemma 3.3 (1) und den Körpergesetzen:

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = z_1\,\overline{z_1}\,z_2\overline{z_2} = |z_1|^2\,|z_2|^2.$$

Die Ungleichungen (3) sind offensichtlich. $\square$

Eine Folge der komplexen Zahlen $\{z_k = x_k + iy_k\}$ konvergiert gegen $z = x + iy$ genau dann, wenn $\{x_k\}$ bzw. $\{y_k\}$ gegen x bzw y konvergiert.

4. Reihen

Viele Funktionen in der Analysis können als unendliche Reihen definiert beziehungsweise dargestellt werden. Darum ist es wichtig, die Konvergenzfrage für Reihen zu untersuchen. Als erste Anwendung der Konvergenzaussagen definieren wir die Exponentialfunktion. Um später den Zusammenhang zu den trigonometrischen Funktionen zu sehen, arbeiten wir direkt in $\mathbb{C}$ statt nur in $\mathbb{R}$, zumal sich die Argumente nur wenig unterscheiden.

Definition 4.1

Eine Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt Reihe mit Gliedern $a_n \in \mathbb{C}$, falls gilt:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Die Reihe heißt konvergent mit Wert $S \in \mathbb{C}$, wenn die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen S konvergiert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Die Zahl S_n wird auch als n-te Partialsumme der Reihe bezeichnet. Oft wird die Reihe in der Form $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ durch ihre ersten Glieder angegeben. Leider ist es auch üblich, die Reihe selbst - unabhängig von der Frage der Konvergenz - ebenfalls mit dem Symbol $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ zu bezeichnen.

Beispiel 4.1

Die Reihe $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots$ *wird auch mit* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$ *bezeichnet. Gemeint ist jeweils die Folge* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit den Gliedern*

$$S_1=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2},\quad S_2=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3},\quad S_3=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4},$$

Für die betrachtete Reihe gilt, für alle $n\in\mathbb{N}$*,*

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}=1-\frac{1}{n+1}.$$

Also ist die Reihe konvergent mit Wert

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1.$$

Die Regeln für die Addition von konvergenten Reihen sowie die Multiplikation von konvergenten Reihen mit reellen oder komplexen Zahlen ergeben sich direkt aus den entsprechenden Regeln für konvergente Folgen, siehe Satz **??** a) in Kapitel 1. So ist für konvergente Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda a_k + \mu b_k)$ konvergent und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

Durch Abänderung, Hinzufügen oder Weglassen von endlich vielen Gliedern in einer Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ wird die Konvergenz oder Divergenz nicht beeinflusst, sondern nur der Wert der Reihe. Zum Beispiel haben wir für $n \in \mathbb{N}_0$ und $m \geq n$

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = \sum_{k=0}^{m} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k,$$

und mit $m \to \infty$ folgt, falls die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert,

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k. \tag{0.1}$$

Wie bei Folgen kann der Anfangsindex einer Reihe statt $k = 0$ auch eine andere Zahl sein, zum Beispiel $k = 1$ wie in Beispiel **??** Allgemein ist eine Reihe nichts anderes als eine Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, die gegeben ist durch die Differenzen $a_n = S_{n+1} - S_n$ und das erste Folgenglied $S_0 = a_0$.

Es stellen sich nun zwei Fragen:

- Wie kann ich den Gliedern a_n der Reihe ansehen, ob die Reihe konvergiert bzw. divergiert?
- Im Fall der Konvergenz: welchen Wert hat die Reihe?

Bei der zweiten Frage ist zum Beispiel gemeint, ob eine bereits definierte Zahl wie $\sqrt{2}$, e, π, $\ldots$ als Grenzwert einer Reihe dargestellt werden kann. Im Folgenden steht aber die erste Frage im Zentrum des Interesses. Dabei ist das nächste Beispiel fundamental.

Bbeispiel 4.2 (Geometrische Reihe)

Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ *mit* $z \in \mathbb{C}$ *konvergiert genau für* $|z| < 1$*. Der Konvergenzbeweis ist derselbe wie in Beispiel* **??**, *und zwar folgt aus Beispiel* **??**

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \to \frac{1}{1 - z} \quad \text{mit } n \to \infty.$$

Dagegen gilt für $|z| \geq 1$ *mit* $S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k$

$$|S_{n+1} - S_n| = |z^{n+1}| = |z|^{n+1} \geq 1,$$

so dass $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *keine Cauchyfolge sein kann.*

Beispiel 4.3 (Unendliche Dezimalbrüche)

Ist $(k_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ *eine Folge von Ziffern* $k_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, *so ist die Reihe* $\sum_{j=0}^{\infty} k_j\, 10^{-j}$ *konvergent, vgl. Satz* **??**.

Beispiel 4.4 (Harmonische Reihe)

Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ *ist bestimmt divergent gegen* $+\infty$. *Dies zeigen wir, indem wir in den Partialsummen wie folgt Klammern setzen:*

$$\underbrace{\left(\frac{1}{1}\right)}_{\geq 1/2} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}_{\geq 1/2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)}_{\geq 1/2} + \underbrace{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{15}\right)}_{\geq 1/2} + \ldots$$

Die Summe der $1/k$ *mit* $2^m \leq k < 2^{m+1}$ *ist nach unten abgeschätzt durch* $2^m \cdot 2^{-(m+1)} = 1/2$.

Nach diesen ersten Beispielen kommen nun zur allgemeinen Konvergenzfrage für Reihen, und beginnen mit einem notwendigen Kriterium.

Satz 4.1 (Nullfolgentest)

Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, so folgt $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

BEWEIS: Nach Voraussetzung ist die Folge der Partialsummen $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ konvergent mit Grenzwert $S \in \mathbb{C}$, also folgt $a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$. $\square$

Als nächstes formulieren wir unsere Konvergenzkriterien für Folgen neu in der Situation von Reihen. Die Cauchyfolgeneigenschaft sieht wie folgt aus.

Satz (Konvergenzkriterium von Cauchy)

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert dann und nur dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt:

$$\left|\sum^{m} a_k\right| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}_0 mit m \geq n > N.$$

Satz (Reihen mit Gliedern $a_k \geq 0$)

Eine reelle Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k \geq 0$ für alle k konvergiert genau dann, wenn die Folge der Partialsummen $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ nach oben beschränkt ist.

Beweis: Da $a_k \geq 0$, ist die Folge (S_n) der Partialsummen monoton wachsend. Die Behauptung folgt aus Kapitel 1, Satz **??** und Satz **??**. $\square$

Beispiel

Für $s > 1$ ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$ konvergent. Wie summieren wie in Beispiel **??** über $2^m \leq k < 2^{m+1}$ und erhalten pro Abschnitt

$$\sum_{2^m \leq k < 2^{m+1}} k^{-s} \leq 2^m \cdot (2^m)^{-s} = (2^{1-s})^m.$$

Es folgt für $n < 2^{M+1}$ mit der geometrischen Reihe, Beispiel **??**, Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}/k = 1 - 1/2 + 1/3 - + \ldots$ ist ein Beispiel für eine sogenannte alternierende Reihe. Während die entsprechende Reihe mit nur positiven Vorzeichen nicht konvergiert – es ist die harmonische Reihe aus Beispiel **??** – ist die Reihe mit dem Vorzeichenwechsel konvergent. Dies ergibt sich aus dem nächsten Satz, bei dessen Beweis wieder Monotonieargumente eine wesentliche Rolle spielen.

Satz (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen)

Sei a_k, $k \in \mathbb{N}_0$, eine reelle, monoton fallende Nullfolge (also insbesondere $a_k \geq 0$). Dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ konvergent. Außerdem gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Abschätzung

$$0 \leq (-1)^n \sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k a_k \leq a_n.$$

Beweis: Wir betrachten die Partialsummen $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gelten die Ungleichungen

$$\begin{aligned}
S_{2n+2} - S_{2n} &= (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \\
S_{2n+3} - S_{2n+1} &= (-1)^{2n+3} a_{2n+3} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} = a_{2n+2} - a_{2n+3} \\
S_{2n+1} - S_{2n} &= (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = -a_{2n+1} \leq 0.
\end{aligned}$$

Also ist die Folge $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ monoton fallend, die Folge $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}_0}$ monoton wachsend. Wegen $S_{2n} \geq S_{2n+1}$ ist die Folge S_{2n} nach unten beschränkt durch S_1, die Folge S_{2n+1} nach oben beschränkt durch S_0. Nach Satz **??** sind die Folgen S_{2n} sowie

Bei der alternierenden Reihe $1 - 1/2 + 1/3 - + \dots$ stößt man auf Merkwürdigkeiten, wenn man die Summationsreihenfolge ändert. Während die Ausgangsreihe konvergent ist, ist die durch Umordnung entstehende Reihe

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{6}\right) + \dots.$$

bestimmt divergent gegen $+\infty$, denn die Summe der positiven Zahlen in der m-ten Klammer ist mindestens $2^{m-1} \cdot 2^{-(m+1)} = 1/4$. Dies ist ein interessantes Phänomen, jedoch sind wir in erster Linie an Reihen interessiert, deren Konvergenz stabiler ist. Dabei ist der folgende Begriff zentral.

Definition

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, das heißt $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$.

Satz (absolut konvergent $\Rightarrow$ konvergent)

Wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, so ist sie konvergent und es gilt

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|.$$

BEWEIS: Die Dreiecksungleichung besagt

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| \quad \text{für } m \geq n \geq 0.$$

Aus dem Cauchykriterium für $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ folgt deshalb das Cauchykriterium für $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, das heißt die Reihe konvergiert nach Satz 0.1. Die Abschätzung folgt, indem wir in der

Der folgende Satz fasst die wesentlichen Kriterien für die absolute Konvergenz von Reihen zusammen.

Satz (Tests für absolute Konvergenz)

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *eine Reihe mit* $a_k \in \mathbb{C}$. *Ist eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt, so ist* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent:*

(a) Majorantenkriterium (M-Test): *Es gilt* $|a_k| \le c_k \in [0, \infty)$ *mit* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty$.

(b) Quotientenkriterium: *Es gibt ein* $\theta \in [0,1)$ *und ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit*

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \le \theta \text{ für alle } k \ge n \quad (\text{wobei } a_k \ne 0 \text{ für } k \ge n).$$

(c) Wurzelkriterium: *Es gibt ein* $\theta \in [0,1)$ *und ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $\sqrt[k]{|a_k|} \le \theta$ *für alle* $k \ge n$.

Umgekehrt ist die Reihe divergent, wenn für ein $n \in \mathbb{N}$ *gilt:*

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \ge 1 \quad \text{oder} \quad \sqrt[k]{|a_k|} \ge 1 \text{ für alle } k \ge n.$$

Für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$ mit $s \geq 1$ haben wir

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^s < 1 \text{ für alle } k \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = 1.$$

Für $s = 1$ gilt Divergenz nach Beispiel **??**; also reicht es in (b) *nicht*, nur die Abschätzung $|a_{k+1}|/|a_k| < 1$ vorauszusetzen. Andererseits konvergiert die Reihe für $s > 1$ nach Beispiel 0.1, also kann aus $\lim_{k\to\infty} |a_{k+1}|/|a_k| = 1$ auch nicht auf Divergenz geschlossen werden. Eine ganz analoge Diskussion gilt für das Wurzelkriterium. Die Bedingungen (b) beziehungsweise (c) sind äquivalent zu den folgenden Voraussetzungen:

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1 \quad \text{bzw.} \quad \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1.$$

Beweis des Satzes: (a) folgt aus Satz 0.2, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ hat man die obere Schranke

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{n} c_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty.$$

Voraussetzung (b) liefert per Induktion

$$|a_k| \leq \theta^{k-n}|a_n| \quad \text{für } k \geq n.$$

Da die geometrische Reihe wegen $0 \leq \theta < 1$ nach Beispiel **??** konvergiert, folgt die Behauptung aus (a) und wir erhalten außerdem die Abschätzung

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| \leq \frac{|a_n|}{1-\theta}. \tag{0.2}$$

Unter der Voraussetzung (c) gilt

$$|a_k| \leq \theta^k \quad \text{für } k \geq n.$$

Wieder folgt die Behauptung durch durch M-Test mit der geometrischen Reihe. Die Abschätzung lautet hier