Analysis I

Guofang Wang

Universität Freiburg

29.11.2016

Reihe

Definition 4.1

Eine Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt Reihe mit Gliedern $a_n \in \mathbb{C}$, falls gilt:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Die Reihe heißt konvergent mit Wert $S \in \mathbb{C}$, wenn die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen S konvergiert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Allgemein ist eine Reihe nichts anderes als eine Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, die gegeben ist durch die Differenzen $a_n = S_{n+1} - S_n$ und das erste Folgenglied $S_0 = a_0$.

Beispiel 4.2 (Geometrische Reihe)

Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ *mit* $z \in \mathbb{C}$ *konvergiert genau für* $|z| < 1$.

Beispiel 4.4 (Harmonische Reihe)

Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ *ist bestimmt divergent gegen* $+\infty$.

Beispiel 4.5

Für $s > 1$ *ist die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$ *konvergent.*

Für $s \leq 1$ ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$ bestimmet divergent gegen $+\infty$.

Satz 4.1 (Nullfolgentest)

Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, so folgt $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Die Aussage $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ ist notwendig, aber nicht hinreichend.

Satz 4.2 (Konvergenzkriterium von Cauchy)

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert dann und nur dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } m \geq n > N.$$

Satz 4.3 (Reihen mit Gliedern $a_k \geq 0$)

Eine reelle Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k \geq 0$ für alle k konvergiert genau dann, wenn die Folge der Partialsummen $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ nach oben beschränkt ist.

Satz 4.1 (Nullfolgentest)

Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, so folgt $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Die Aussage $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ ist notwendig, aber nicht hinreichend.

Satz 4.2 (Konvergenzkriterium von Cauchy)

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert dann und nur dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt:

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } m \geq n > N.$$

Satz 4.3 (Reihen mit Gliedern $a_k \geq 0$)

Eine reelle Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k \geq 0$ für alle k konvergiert genau dann, wenn die Folge der Partialsummen $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ nach oben beschränkt ist.

Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$$

ist ein Beispiel für eine sogenannte alternierende Reihe.

Satz 4.4 (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen)

Sei a_k, $k \in \mathbb{N}_0$, eine reelle, monoton fallende Nullfolge (also insbesondere $a_k \geq 0$). Dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ konvergent. Außerdem gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Abschätzung

$$0 \leq (-1)^n \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k a_k \leq a_n.$$

Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

ist ein Beispiel für eine sogenannte alternierende Reihe.

Satz 4.4 (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen)

Sei a_k, $k \in \mathbb{N}_0$, eine reelle, monoton fallende Nullfolge (also insbesondere $a_k \geq 0$). Dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ konvergent. Außerdem gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Abschätzung

$$0 \leq (-1)^n \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k a_k \leq a_n.$$

Bei der alternierenden Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \dots$$

stößt man auf Merkwürdigkeiten, wenn man die Summationsreihenfolge ändert. Während die Ausgangsreihe konvergent ist, ist die durch Umordnung entstehende Reihe

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{6}\right) + \dots.$$

bestimmt divergent gegen $+\infty$, denn die Summe der positiven Zahlen in der m-ten Klammer ist mindestens $2^{m-1} \cdot 2^{-(m+1)} = 1/4$.

Dies ist ein interessantes Phänomen, jedoch sind wir in erster Linie an Reihen interessiert, deren Konvergenz stabiler ist. Dabei ist der folgende Begriff zentral.

Definition 4.2

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, das heißt $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$.

Satz 4.5 (absolut konvergent $\Rightarrow$ konvergent)

Wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, so ist sie konvergent und es gilt $|\sum_{k=0}^{\infty} a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$.

Satz 4.6 (Tests für absolute Konvergenz)

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \in \mathbb{C}$. Ist eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent:

(a) *Majorantenkriterium (M-Test):* Es gilt $|a_k| \leq c_k \in [0, \infty)$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty$.

(b) *Quotientenkriterium:* Es gibt ein $\theta \in [0, 1)$ und $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq \theta \text{ für alle } k \geq n \quad (\text{wobei } a_k \neq 0 \text{ für } k \geq n).$$

(c) *Wurzelkriterium:* Es gibt ein $\theta \in [0, 1)$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[k]{|a_k|} \leq \theta$ für alle $k \geq n$.

Umgekehrt ist die Reihe divergent, wenn für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \geq 1 \quad \text{oder} \quad \sqrt[k]{|a_k|} \geq 1 \text{ für alle } k \geq n.$$

Bemerkungen: Für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$ mit $s \geq 1$ haben wir

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^s < 1 \text{ für alle } k \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = 1.$$

Für $s = 1$ gilt Divergenz nach Beispiel 4.4; also reicht es in (b) *nicht*, nur die Abschätzung $|a_{k+1}|/|a_k| < 1$ vorauszusetzen. Andererseits konvergiert die Reihe für $s > 1$ nach Beispiel 4.5, also kann aus $\lim_{k\to\infty} |a_{k+1}|/|a_k| = 1$ auch nicht auf Divergenz geschlossen werden.
Eine ganz analoge Diskussion gilt für das Wurzelkriterium.

Bemerkungen: Die Bedingungen (b) beziehungsweise (c) sind äquivalent zu den folgenden Voraussetzungen:

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1 \quad \text{bzw.} \quad \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1.$$

(Übung!)

Beweis des Satzes: (a) folgt aus Satz 4.3, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ hat man die obere Schranke $\sum_{k=0}^{n} |a_k| \le \sum_{k=0}^{n} c_k \le \sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty$.
Voraussetzung (b) liefert per Induktion

$$|a_k| \le \theta^{k-n} |a_n| \quad \text{für } k \ge n.$$

Da die geometrische Reihe wegen $0 \le \theta < 1$ nach Beispiel 1.8 konvergiert, folgt die Behauptung aus (a) und wir erhalten außerdem die Abschätzung

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| \le \frac{|a_n|}{1-\theta}. \tag{4.2}$$

Unter der Voraussetzung (c) gilt: $|a_k| \le \theta^k \quad$ für $k \ge n$.
Wieder folgt die Behauptung durch durch M-Test mit der geometrischen Reihe. Die Abschätzung lautet hier

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| \le \frac{\theta^n}{1-\theta}. \tag{4.3}$$

Die Divergenzaussagen folgen aus dem Nullfolgentest, Satz 4.1. □

Als Anwendung kommt nun endlich die

Satz 4.7 (Definition der Exponentialfunktion)

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$ ist für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent; damit ist die Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

wohldefiniert.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $|z| \leq (n+1)/2$ gilt die Abschätzung

$$\left| \exp(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{2|z|^n}{n!}.$$

Beweis: Für $z = 0$ ist nichts zu zeigen. Seien $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $|z| \leq (n+1)/2$. Dann gilt für $k \geq n$ mit $a_k = z^k/k!$

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{|z|}{k+1} \leq \frac{1}{2}.$$

Aus dem Quotientenkriterium, Satz 4.6 (b), folgt die absolute Konvergenz. Außerdem liefert die Ungleichung (4.2), hier mit $\theta = 1/2$ und $a_n = z^n/n!$,

$$\sum_{k=n}^{\infty} \left| \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{|z^n/n!|}{1 - 1/2} = \frac{2|z|^n}{n!},$$

das heißt

$$\left| \exp(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^k}{k!} \right| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \left| \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{2|z|^n}{n!}.$$

$\square$

Wegen $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ist durch Satz 4.7 auch die reelle Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \, \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

erklärt.

Nach Definition 2.2 gilt $\exp(1) = e \approx 2,7\ldots.$ Außerdem sieht man wie in Beispiel 2.3

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

(Übung!)

Eine charakteristische Eigenschaft der Exponentialfunktion ist die Funktionalgleichung

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w).$$

Um diese zu beweisen, brauchen wir einen Satz zur Multilplikation von Reihen.

Bei der Multiplikation von zwei Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ treten die doppelt indizierten Produkte $a_k b_l$ mit $k, l \in \mathbb{N}_0$ auf.

Es ist zunächst nicht klar, in welcher Reihenfolge diese summiert werden sollen. Schreiben wir die Produkte in einem Schema auf, so dass $a_k b_l$ in der k-ten Zeile und l-ten Spalte steht, so ist folgendes Summationsverfahren naheliegend:

erst werden die $n+1$ Produkte $a_k b_l$ in jeder Diagonale $k+l=n$ addiert, dann wird die Konvergenz der resultierenden Reihe studiert.

Im folgenden sind stets $k, l \in \mathbb{N}_0$ und wir schreiben zum Beispiel kurz $\sum_{k+l=n}$ für die Summe über alle Paare $k, l \in \mathbb{N}_0$ mit $k+l=n$.

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & \cdots & \cdots & a_0b_n & \cdots \\
a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & \cdots & a_1b_n & \cdots \\
a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & \cdots & a_2b_n & \cdots \\
\ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
\ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
a_nb_0 & a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & \cdots & a_nb_n & \cdots \\
\ddots & \ddots & \ddots & & & &
\end{array}
$$

Satz 4.8 (Cauchyprodukt)

Die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ seien absolut konvergent. Dann ist auch die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_n \quad \text{mit} \quad c_n = \sum_{k+l=n} a_k b_l = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

absolut konvergent, und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k+l=n} a_k \, b_l \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right).$$

BEWEIS: Wir setzen für $N \in \mathbb{N}_0$

$$A_N := \sum_{k=0}^{N} |a_k| \to \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| =: A \quad \text{und} \quad B_N := \sum_{k=0}^{N} |b_k| \to \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| =: B,$$

wobei nach Voraussetzung $A, B < \infty$. Es folgt

$$\sum_{n=0}^{N} |c_n| \leq \sum_{k+l\leq N} |a_k|\,|b_l| \leq \sum_{k,l\leq N} |a_k|\,|b_l| = A_N B_N \leq AB < \infty.$$

Nach Satz 4.3 ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent und insbesondere konvergent (Satz 4.5). Um den Grenzwert zu identifizieren, reicht es also die geraden Partialsummen $\sum_{n=0}^{2N} c_n$ zu betrachten. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
& \left|\left(\sum_{k=0}^{2N} a_k\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{2N} b_l\right) - \sum_{n=0}^{2N} c_n\right| \\
= \quad & \left|\sum_{k,l\leq 2N} a_k b_l - \sum_{k+l\leq 2N} a_k b_l\right| \\
\leq \quad & \sum_{k,l\leq 2N, \max(k,l)>N} |a_k|\,|b_l|.
\end{aligned}$$

Die rechte Seite ist gleich $A_{2N}\,B_{2N} - A_N\,B_N$, konvergiert also gegen Null für $N \to \infty$. Für die letzte Abschätzung ist es hilfreich, die Indexbereiche zu skizzieren. Jedenfalls ist damit die gewünschte Formel für das Cauchyprodukt bewiesen. $\square$

Wir wenden nun den Produktsatz auf die Exponentialfunktion an.

Satz 4.9 (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion)

Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w).$$

BEWEIS: Da die Reihen absolut konvergieren, erhalten wir mit Satz 4.8 und der Binomischen Formel, Satz 2.6,

$$\begin{aligned}\exp(z)\exp(w) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k w^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+w)^n}{n!} = \exp(z+w).\end{aligned}$$

$\square$

Wir wollen daraus direkt einige Eigenschaften der Exponentialfunktion herleiten. Dazu brauchen wir noch eine einfache Tatsache.

Lemma 4.1

Für $a_k \in \mathbb{C}$ sei die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent. Dann ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \overline{a}_k$ konvergent und mit $S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ gilt

$$\overline{S} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a}_k.$$

Beweis: Mit $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ gilt $\overline{S}_n = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a}_k$ und (wie für jede Folge)

$$|\overline{S} - \overline{S}_n| = |\overline{S - S_n}| = |S - S_n| \to 0 \quad \text{mit } n \to \infty.$$

$\square$

Folgerung 4.1

Die Exponentialfunktion hat folgende Eigenschaften:

(1) $\exp(z)\exp(-z) = 1$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$, *insbesondere* $\exp(z) \neq 0$.

(2) $\exp(x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

(3) $|\exp(iy)| = 1$ *für alle* $y \in \mathbb{R}$.

(4) $\exp(pz) = (\exp(z))^p$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{Z}$.

BEWEIS: (1). Behauptung (1) folgt sofort aus Satz 4.9, denn

$$\exp(z)\exp(-z) = \exp\big(z + (-z)\big) = \exp(0) = 1.$$

(2). Für $x > 0$ ist trivialerweise $\exp(x) \in (1, \infty)$, und für $x < 0$ folgt $\exp(x) = 1/\exp(-x) \in (0, 1)$ aus Gleichung (1).

(3). Aus Lemma 4.1 folgt

$$\overline{\exp(z)} = \overline{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\left(\frac{z^k}{k!}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{z}^k}{k!} = \exp(\overline{z}).$$

Gleichung (3) ergibt sich nun mit Lemma 3.4:

$$|\exp(iy)|^2 = \exp(iy)\overline{\exp(iy)} = \exp(iy)\exp(\overline{iy}) = \exp(iy)\exp(-iy) = 1.$$

(4). Für $p \in \mathbb{N}_0$ folgt Behauptung (4) mit der Funktionalgleichung durch Induktion, und ebenfalls mit der Funktionalgleichung gilt für $p \in \mathbb{N}$

$$1 = \exp(pz)\exp(-pz) = (\exp(z))^p \exp(-pz)),$$

also

$$\exp(-pz) = (\exp(z)^p)^{-1} = \exp(z)^{-p}.$$

Damit sind alle Aussagen bewiesen. $\square$

Bislang haben wir außer neuerdings der Exponentialfunktion nur Polynome beziehungsweise stückweise Polynome als Funktionen zur Verfügung. Es ist naheliegend, weitere neue Funktionen ebenfalls als Grenzwerte von Folgen bzw. Reihen von Polynomen zu suchen. Dies führt auf den Begriff der Potenzreihe.

Definition 4.3 (Potenzreihen)

Eine komplexe Potenzreihe ist eine Reihe der Form

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{mit } a_k \in \mathbb{C}.$$

Allgemeiner betrachtet man auch Potenzreihen mit Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$, das heißt Reihen der Form $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$. Der Einfachheit halber beschränken wir uns jedoch hier auf den Fall $z_0 = 0$.

Definition 4.3 lässt offen, ob beziehungsweise für welche $z \in \mathbb{C}$ die Reihe tatsächlich konvergiert. Natürlich ist $P(0) = a_0$, es kann aber sein, dass die Reihe für alle $z \neq 0$ divergiert, dann ist sie natürlich nicht von Interesse. Ein Beispiel ist $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$, wie der Nullfolgentest sofort ergibt.

Bei interessanten Reihen (was immer das ist) erwarten wir aber Konvergenz zumindest für manche $z \in \mathbb{C}$. Auf dem Konvergenzgebiet erhalten wir dann eine Funktion, und genau daran sind wir interessiert. Zum Beispiel konvergiert die Exponentialreihe sogar für alle $z \in \mathbb{C}$, und definiert die Exponentialfunktion.

Erstaunlicherweise kann über das Konvergenzgebiet einer Potenzreihe eine allgemeine Aussage getroffen werden. Dazu benötigen wir das folgende technische Lemma, dessen Abschätzung (4.5) noch mehrfach benutzt wird.

Lemma 4.2

Sei $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit $a_k \in \mathbb{C}$, die für ein $z_0 \neq 0$ konvergiert. Dann gibt es ein $M \in [0, \infty)$ mit

$$|a_k|\,|z_0|^k \leq M \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0. \tag{4.4}$$

Aus (4.4) folgt weiter, dass $P(z)$ für $|z| < |z_0|$ absolut konvergiert und dass für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$|P(z) - P_n(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|\,|z|^k \leq \frac{M}{1 - \frac{|z|}{|z_0|}} \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^{n+1}. \tag{4.5}$$

Hier ist $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ die n-te Partialsumme.

Beweis: für $|z| < |z_0|$ gilt

$$|a_k z^k| = |a_k|\,|z_0|^k(|z|/|z_0|)^k \leq M(|z|/|z_0|)^k.$$

Wegen $|z|/|z_0| < 1$ folgt die absolute Konvergenz aus dem Majorantenkriterium durch Vergleich mit der geometrischen Reihe. Genauer gilt

$$\begin{aligned} |P(z) - P_n(z)| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k||z|^k \leq M \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^k \\ &\leq \frac{M}{1 - \frac{|z|}{|z_0|}} \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

□

Satz 4.10 (vom Konvergenzradius)

Zu jeder Potenzreihe $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ gibt es genau ein $R \in [0, \infty]$, den Konvergenzradius, mit folgender Eigenschaft:

$$P(z) \text{ ist } \begin{cases} \text{absolut konvergent} & \text{für } |z| < R, \\ \text{divergent} & \text{für } |z| > R. \end{cases}$$

Beweis: Die Eindeutigkeit von R ist klar. Zur Existenz definieren wir

$$R = \sup\{|z| : P(z) \text{ konvergiert}\} \in [0, \infty].$$

Ist $|z| < R$, so gibt es nach Definition ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0| \leq R$, so dass $P(z_0)$ konvergiert. Also konvergiert $P(z)$ absolut wegen Lemma 4.2. Andererseits ist die Reihe divergent für $|z| > R$ nach Definition von R. $\square$

Beispiel 4.6

Als weiteres Beispiel einer Potenzreihe betrachten wir für beliebiges $\alpha \in \mathbb{C}$ die Binomialreihe

$$B_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^2 + \ldots$$

Für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ bricht die Reihe nach $k = \alpha$ ab, und die Binomische Formel aus Satz 2.6 liefert $B_\alpha(z) = (1+z)^\alpha$.
Im folgenden sei nun $\alpha \notin \mathbb{N}_0$. Für $z \neq 0$ ist dann $a_k = \binom{\alpha}{k} z^k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, und es gilt

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{|\alpha - k|}{k+1}|z| \to |z| \quad \text{mit } k \to \infty.$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe für $|z| < 1$ und divergiert für $|z| > 1$, das heißt der Konvergenzradius ist $R = 1$.

Für eine gegebene reelle Funktion $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ stellt sich die Frage,

ob die Funktion durch eine Potenzreihe dargestellt werden kann: gibt es $a_k \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für $x \in (-R, R)$, oder zumindest auf einem kleineren Intervall $x \in (-r, r)$?

Wenn ja, sind die a_k eindeutig bestimmt?

Natürlich kann diese Frage auch über $\mathbb{C}$ gestellt werden, anstelle der Intervalle treten dann Kreisscheiben $B_R(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$.

Das folgende Ergebnis zeigt, dass bei weitem nicht jede Funktion als Potenzreihe darstellbar ist.

Satz 4.11 (Identitätssatz für Potenzreihen)

Sei $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe, die für ein $z_0 \neq 0$ konvergiert. Ist $0 \in \mathbb{C}$ Häufungspunkt der Menge $\{z \in \mathbb{C} : P(z) = 0\}$, so folgt $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

BEWEIS: Wir nehmen induktiv an, dass schon $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$ gezeigt ist, wobei der Fall $n = 0$ den Induktionsanfang liefert. Für $|z| \leq |z_0|/2$ folgt aus (4.5) die Abschätzung

$$|P(z) - a_n z^n| = |P(z) - P_n(z)| \leq C|z|^{n+1} \quad \text{wobei } C = 2M|z_0|^{-(n+1)}.$$

Nach Voraussetzung gilt $P(z_i) = 0$ für eine Folge $z_i \neq 0$ mit $z_i \to 0$, und Einsetzen von $z = z_i$ ergibt $|a_n|\,|z_i|^n \leq C|z_i|^{n+1}$, also $|a_n| \leq C|z_i| \to 0$ mit $i \to \infty$, das heißt $a_n = 0$. $\square$

Definition 4.3 (Häufungspunkt einer Mengen)

Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine Menge. $a \in \mathbb{C}$ heißt Häufungspunkt von M, falls für alle $\varepsilon > 0$ die Menge

$$M \cap U_\varepsilon(a)$$

unendlich ist.

Folgerung 4.2 (Koeffizientenvergleich)

Seien $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ und $Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius. Ist der Nullpunkt Häufungspunkt der Menge $\{z \in \mathbb{C} : P(z) = Q(z)\}$, so folgt $a_k = b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

BEWEIS: Die Potenzreihe $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ mit $c_k = a_k - b_k$ hat positiven Konvergenzradius, und der Nullpunkt ist Häufungspunkt der Menge $\{z \in \mathbb{C} : F(z) = 0\}$. Die Behauptung folgt damit aus Satz 4.11. □

Zum Schluss dieses Kapitels kommen wir zu der Frage der Umordnung von Reihen zurück und zeigen, dass absolut konvergente Reihen beliebig umgeordnet werden können.

Satz 4.12 (Umordnungssatz)

Sei $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv. Falls $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent ist, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_{\tau(j)}$ absolut und hat denselben Grenzwert.

Beweis: Setze $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Nach Voraussetzung gilt

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| - \sum_{k=1}^{n} |a_k| \to 0 \quad \text{mit } n \to \infty,$$

also gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon/2$. Für m hinreichend groß gilt $\tau^{-1}\{1, \dots, n\} \subset \{1, \dots, m\}$ beziehungsweise $\{1, \dots, n\} \subset \tau(\{1, \dots, m\})$, und es folgt

$$\begin{aligned} \left| S - \sum_{j=1}^{m} a_{\tau(j)} \right| &\leq \left| S - \sum_{j=1, \tau(j) \leq n}^{m} a_{\tau(j)} \right| + \sum_{j=1, \tau(j) > n}^{m} |a_{\tau(j)}| \\ &\leq \underbrace{\left| S - \sum_{k=1}^{n} a_k \right|}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|}_{< \varepsilon/2}. \end{aligned}$$