Analysis I

Guofang Wang

Universität Freiburg

30.11.2016

5. Teilmengen von $\mathbb{R}$ und von $\mathbb{R}^n$

Der $\mathbb{R}^n$ ist eine mathematische Verallgemeinerung:

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\} = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ mal}}.$$

Für $x \in \mathbb{R}$ ist $|x|$ der Abstand zum Nullpunkt. Die entsprechende Verallgemeinerung im $\mathbb{R}^n$ ist die Euklidische Länge oder Norm.

Definition 5.1

Die Euklidische Norm eines Vektors $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Der Euklidische Abstand von zwei Punkten $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist $|x - y|$.

Definition 5.4 (Konvergenz im $\mathbb{R}^n$)

Die Folge $x_k \in \mathbb{R}^n$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}^n$, falls gilt:

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{R}$, so dass für alle $k > N$ gilt: $|x_k - a| < \varepsilon$.

Definition 5.5 (Beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}^n$)

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt beschränkt, wenn gilt:

Es gibt ein $K \geq 0$ mit $|x| \leq K$ für alle $x \in M$.

Lemma 5.2

Für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\max_{i=1,\ldots,n} |x_i| \leq |x| \leq \sqrt{n} \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|.$$

Satz 5.3 (Eigenschaften bzgl. Norm $\simeq$ Eigenschaften bzgl. der Koordinaten)

Eine Folge $x_k = \big((x_k)_1, \ldots, (x_k)_n\big) \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann bezüglich der Euklidischen Norm konvergent (beschränkt, Cauchyfolge), wenn für alle $i = 1, \ldots, n$ die Koordinatenfolgen $\big((x_k)_i\big)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent (beschränkt, Cauchyfolgen) sind.

Folgerung 5.1

Mit der Euklidischen Norm ist $\mathbb{R}^n$ vollständig: zu jeder Cauchyfolge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gibt es ein $a \in \mathbb{R}^n$, so dass $x_k \to a$ mit $k \to \infty$.

Folgerung 5.2 (Bolzano-Weierstraß im $\mathbb{R}^n$)

Jede beschränkte Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Definition 5.6 (Häufungspunkt von Mengen)

Ein Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ heißt Häufungspunkt der Menge $M \subset \mathbb{R}^n$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge $B_\varepsilon(a) \cap M$ unendlich viele Elemente hat.

Ein Häufungspunkt von M ist nicht notwendig Element von M, zum Beispiel ist $0 \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von $M = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$.

Lemma 5.3

Ein Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann Häufungspunkt der Menge M, wenn es eine Folge von Punkten $x_k \in M\backslash\{a\}$ gibt mit $\lim_{k\to\infty} x_k = a$.

BEWEIS: Sei a Häufungspunkt gemäß Definition 5.6. Zu $\varepsilon_k = 1/k$ gibt es dann ein $x_k \in B_{1/k}(a) \cap M\backslash\{a\}$. Die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist wie verlangt.

Sei umgekehrt eine Folge $x_k \in M\backslash\{a\}$ gegeben mit $\lim_{k\to\infty} x_k = a$. Angenommen, für ein $\varepsilon > 0$ ist die Menge $B_\varepsilon(a) \cap M$ endlich, also $B_\varepsilon(a) \cap M\backslash\{a\} = \{a_1, \ldots, a_m\}$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $\varrho := \min_{1\le i\le m} |a_i - a| > 0$. Wegen $\lim_{k\to\infty} |x_k - a| = 0$ folgt für k hinreichend groß

$$x_k \in B_\varrho(a) \cap M\backslash\{a\} = \emptyset,$$

ein Widerspruch. $\square$

Beispiel 5.2

Die Menge $M = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ hat $0 \in \mathbb{R}$ als einzigen Häufungspunkt.

Dagegen ist die Menge der Häufungspunkte von $\mathbb{Q}$ gleich $\mathbb{R}$, denn in jeder Umgebung einer reellen Zahl gibt es eine rationale Zahl, siehe Satz 2.8.

Es gibt eine kleine Differenz zwischen dem Begriff des Häufungspunkts für Folgen und für Mengen: die konstante Folge $x_k = a$, $k \in \mathbb{N}$, hat den Häufungspunkt a, dagegen hat die einelementige Menge $\{a\} \subset \mathbb{R}^n$ keinen Häufungspunkt.

Überlegen Sie, dass für eine beliebige Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^n$ die Häufungspunkte des Wertebereichs $M = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine Teilmenge der Häufungspunkte der Folge bilden, die aber eine echte Teilmenge sein kann, wie das Beispiel der konstanten Folge zeigt.

Definition 5.7

Eine Menge

(i) $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt offen, falls es zu jedem $a \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $B_\varepsilon(a) \subset U$,

(ii) $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt abgeschlossen, wenn folgende Implikation stets gilt:

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ mit } x_n \in A \quad \Rightarrow \quad a \in A.$$

Nach Lemma 5.3 ist eine Menge A genau dann abgeschlossen, wenn jeder Häufungspunkt von A schon Element von A ist.

Beispiel

Die Kugel $B_\varrho(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-a| < \varrho\}$ *ist offen. Denn sei* $x \in B_\varrho(a)$. *Für* $\varepsilon := \varrho - |x-a| > 0$ *und* $y \in B_\varepsilon(x)$ *folgt aus der Dreiecksungleichung*

$$|y-a| \le |y-x| + |x-a| < \varepsilon + |x-a| = \varrho.$$

Also gilt $B_\varepsilon(x) \subset B_\varrho(a)$, *das heißt* $B_\varrho(a)$ *ist offen.*
Die Kugel $K_\varrho(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-a| \le \varrho\}$ *ist dagegen abgeschlossen: ist* $x_k \in K_\varrho(a)$ *und* $x_k \to x \in \mathbb{R}^n$, *so folgt*

$$|x-a|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left((x_k)_i - a_i\right)^2 \le \varrho^2,$$

das heißt $x \in K_\varrho(a)$.

Satz 5.4

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann offen, wenn $\mathbb{R}^n \backslash M$ abgeschlossen ist.

Beweis: Sei M offen und $x_k \in \mathbb{R}^n \backslash M$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = a \in \mathbb{R}^n$. Wäre $a \in M$, so folgt $B_\varepsilon(a) \subset M$ für ein $\varepsilon > 0$, und somit $x_k \in M$ für hinreichend große k, ein Widerspruch. Also ist $a \in \mathbb{R}^n \backslash M$, das heißt $\mathbb{R}^n \backslash M$ ist abgeschlossen.

Sei nun $\mathbb{R}^n \backslash M$ abgeschlossen. Wäre M nicht offen, so gibt es ein $a \in M$ mit $B_\varepsilon(a) \backslash M \neq \emptyset$ für alle $\varepsilon > 0$. Finde induktiv $x_k \in B_{1/k}(a)$ mit $x_k \in \mathbb{R}^n \backslash M$. Es folgt $a = \lim_{k\to\infty} x_k \in \mathbb{R}^n \backslash M$, ein Widerspruch. $\square$

Satz 5.5

Die offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ bilden eine Topologie, das heißt es gelten folgende Aussagen:

(1) $\emptyset$ und $\mathbb{R}^n$ sind offen.

(2) Jede Vereinigung $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ von offenen Mengen $U_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ ist offen.

(3) Der Durchschnitt $\bigcap_{i=1}^k U_i$ von endlich vielen offenen Mengen $U_i \subset \mathbb{R}^n$ ist offen.

BEWEIS: (1) Aussage (1) ist evident.

(2) Ist $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, so gilt $x \in U_\mu$ für ein $\mu \in \Lambda$. Da U_μ offen, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset U_\mu \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, was zu zeigen war.

(3) Sei nun $x \in \bigcap_{i=1}^k U_i$ wie in (3). Da U_i offen, gibt es ein $\varepsilon_i > 0$ mit $B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$ für $i = 1, \ldots, k$. Es folgt $\varepsilon := \min_{i=1,\ldots,k} \varepsilon_i > 0$ und $B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$ für alle $i = 1, \ldots, k$, also
$B_\varepsilon(x) \subset \bigcap_{i=1}^k U_i$. $\square$

Wir betonen, dass im Gegensatz zur Vereinigung der Durchschnitt von unendlich vielen offenen Mengen in der Regel nicht offen ist, zum Beispiel gilt

$$\{a\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{1/n}(a).$$

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ muss weder offen noch abgeschlossen sein; dies trifft zum Beispiel auf ein halboffenes Intervall $[a, b)$ zu.

Die Mengen $\mathbb{R}$ und $\emptyset$ sind die einzigen Teilmengen von $\mathbb{R}$, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind. Dies soll in den Übungen gezeigt werden.

Durch Übergang zu den Komplementen sieht man, dass beleibige Durchschnitte und endliche Vereinigungen von abgeschlossenen Mengen abermals abgeschlossen sind.

Kapital 2. Stetige Funktionen

1 Grenzwerte und Stetigkeit

Eine Funktion auf einer Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ mit Werten in $\mathbb{R}^m$ ist bekanntlich eine Abbildung

$$f : D \to \mathbb{R}^m, \, x \mapsto f(x).$$

Im Fall $m = 1$, also $f : D \to \mathbb{R}$, heißt die Funktion reellwertig.

D heißt Definitionsbereich.
$f(D)$ heißt Bild von f.

Der Graph von f ist die Menge

$$\mathrm{Graph}\,(f) = \{(x, f(x)) : x \in D\} \subset D \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

Beispiel 1.1

i) Konstante Funktionen. Sei $c \in \mathbb{R}$ vorgegeben.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & c \end{array}$$

ii) Identitische Abbildung.

$$\begin{array}{rcl} id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

Beispiel 1.2

Die Signumfunktion ist definiert durch

$$\operatorname{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Beispiel 1.3

Die Gaußklammerfunktion oder Größte-Ganze-Funktion (oder floor-Funktion) ist gegeben durch

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = [x] = \max\{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}.$$

Beispiel 1.4

Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, so bezeichnet man Funktionen $c : I \to \mathbb{R}^m$ auch als (parametrisierte) Kurven. Oft wird die unabhängige Variable mit $t \in I$ (statt $x \in I$) bezeichnet. Diese Notation folgt Newton, der sich für Bahnkurven von Massenpunkten in Abhängigkeit von der Zeit interessiert hat und $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ schreibt. Ein explizites Beispiel ist der horizontale Wurf aus der Höhe h mit Geschwindigkeit v:

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ c(t) = (vt, 0, h - gt^2/2) \quad (g = \textit{Erdbeschleunigung}).$$

Beispiel 1.5

Die charakteristische Funktion (Indikatorfunktion) einer Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$\chi_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in E, \\ 0 & \text{für } x \notin E. \end{cases}$$

Beispiel 1.6

Die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist die Funktion

$$|\cdot| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

In $\mathbb{R}$ sowie in $\mathbb{C}$ sprechen wir auch von der Betragsfunktion.

Beispiel 1.7

Die Abstandsfunktion einer Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$\operatorname{dist}_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \operatorname{dist}_E(x) = \inf\{|y - x| : y \in E\}.$$

Definition 1.1 (Stetigkeit)

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in D$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta. \tag{1.1}$$

f heißt stetig, falls f in allen $x_0 \in D$ stetig ist.

Mithilfe von Umgebungen lässt sich die Stetigkeit in x_0 auch so fassen:

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$f(D \cap B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0)).$$

Beispiel 1.8

Konstante Funktionen sind stetig: sei $f(x) = c$ *für alle* $x \in D$ *und ein* $c \in \mathbb{R}^m$*. Dann folgt*

$$|f(x) - f(x_0)| = 0 \qquad \text{für alle } x \in D,$$

also können wir zu gegebenem $\varepsilon > 0$ *jedes* $\delta > 0$ *wählen.*

Beispiel 1.9

Affinlineare Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sind stetig: sei* $f(x) = ax + b$ *mit* $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$*. Dann gilt*

$$|f(x) - f(x_0)| = |(ax + b) - (ax_0 + b)| = |a|\,|x - x_0|,$$

das heißt wir können $\delta = \varepsilon/|a|$ *wählen.*

Beispiel 1.10

Die Euklidische Norm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, *ist ebenfalls stetig auf ganz* $\mathbb{R}^n$, *denn aus der Dreiecksungleichung folgt*

$$|f(x) - f(x_0)| = ||x| - |x_0|| \leq |x - x_0|.$$

Wir können also $\delta = \varepsilon$ *nehmen.*

Beispiel 1.11

Die charakteristische Funktion von $\mathbb{Q}$ *(oder Dirichlet-Funktion)*

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ist nirgends stetig. Denn wäre $\chi_{\mathbb{Q}}$ *stetig in* $x_0 \in \mathbb{R}$*, so gibt es zu* $\varepsilon = 1$ *ein* $\delta > 0$ *mit*

$$|\chi_{\mathbb{Q}}(x) - \chi_{\mathbb{Q}}(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Ist $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$*, so können wir* $x \in \mathbb{Q}$ *wählen, da* $\mathbb{Q}$ *dicht in* $\mathbb{R}$ *ist nach Satz 2.8, und erhalten* $1 = |\chi_{\mathbb{Q}}(x) - \chi_{\mathbb{Q}}(x_0)| < \varepsilon = 1$*, ein Widerspruch. Ist* $x_0 \in \mathbb{Q}$*, so können wir analog argumentieren, da* $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *ebenfalls dicht ist nach Aufgabe 2, Serie 3.*

Ein sehr nützliches, hinreichendes Kriterium für die Stetigkeit ist das folgende.

Definition 1.2 (Lipschitzstetigkeit)

$f : D \to \mathbb{R}^m$ heißt Lipschitzstetig mit Konstante $L \in [0, \infty)$, falls gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in D.$$

Die Euklidische Norm ist Lipschitzstetig mit Konstante $L = 1$, vgl. Beispiel 1.10.

Lemma 1.1

Jede Lipschitzstetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ ist stetig.

Beweis: Sei f Lipschitzstetig mit Konstante $L > 0$. Zu $x_0 \in D$ und gegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta = \varepsilon / L > 0$, und erhalten für $|x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| < L\delta = \varepsilon.$$

$\square$

Beispiel 1.12

Die Abstandsfunktion $\mathrm{dist}_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *einer Menge* $E \subset \mathbb{R}^n$ *ist Lipschitzstetig mit Konstante Eins. Denn es gilt nach der Dreiecksungleichung*

$$|y - x_2| \leq |y - x_1| + |x_1 - x_2| \quad \text{für alle } x_{1,2} \in \mathbb{R}^n,\ y \in E.$$

Bilden wir auf beiden Seiten das Infimum über alle $y \in E$*, so folgt*

$$\mathrm{dist}_E(x_2) \leq \mathrm{dist}_E(x_1) + |x_1 - x_2|.$$

Durch Vertauschen von x_1 *mit* x_2 *ergibt sich*

$$|\mathrm{dist}_E(x_1) - \mathrm{dist}_E(x_2)| \leq |x_1 - x_2|.$$

Beispiel 1.13

Lineare Abbildungen $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sind Lipschitzstetig. Um dies zu zeigen, verwenden wir die Matrixdarstellung bezüglich der Standardbasen. Es gilt für $x \in \mathbb{R}^n$

$$A(x)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad \text{wobei } A(x) = \sum_{i=1}^{m} A(x)_i e_i.$$

Die Euklidische Norm der Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist

$$|A| = \Big(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \Big)^{1/2}.$$

Mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz folgt

$$|A(x)|^2 = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \Big)^2 \leq \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \Big) \cdot \Big(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \Big) = |A|^2 |x|^2,$$

das heißt es gilt die Abschätzung

$$|A(x)| \leq |A|\,|x| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Insbesondere folgt für $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|A(x) - A(y)| = |A(x-y)| \leq |A|\,|x-y|,$$

d. h. A ist Lipschitzstetig mit Konstante $|A|$.

Satz 1.1 (Folgenkriterium der Stetigkeit)

Für $f : D \to \mathbb{R}^m$ und $x_0 \in D$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) f ist stetig in x_0.

(2) Für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k \in D$ und $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ gilt: $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0)$.

Beweis: Für die Implikation $(1) \Rightarrow (2)$ sei $x_k \in D$ mit $x_k \to x_0$ für $k \to \infty$. Wähle zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$. Es gibt ein $N \in \mathbb{R}$ mit $|x_k - x_0| < \delta$ für $k > N$, also folgt $|f(x_k) - f(x_0)| < \varepsilon$ für $k > N$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Wir überlegen nun was es bedeutet, wenn f nicht stetig in x_0 ist. Es gibt dann ein $\varepsilon > 0$, so dass (1.1) für kein $\delta > 0$ erfüllt ist. Wählen wir $\delta_k = 1/k$ für $k = 1, 2, \ldots$, so gibt es $x_k \in D$ mit $|x_k - x_0| < 1/k$, aber $|f(x_k) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Ein Widerspruch zu (2). Dies zeigt indirekt die Implikation $(2) \Rightarrow (1)$, womit der Satz bewiesen ist. $\square$

Lemma 1.2

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann stetig in $x_0 \in D$, wenn jede Koordinatenfunktion $f_i : D \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig ist.

Beweis: Mit dem vorangegangenen Satz folgt dies aus der Äquivalenz von Konvergenz und Konvergenz der Koordinatenfolgen im $\mathbb{R}^m$, siehe Satz 3.6. $\square$

Lemma 1.3

Sei $g : D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0 mit $g(x_0) \neq 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|g(x)| \geq |g(x_0)|/2 > 0 \quad \text{für alle } x \in D \cap U_\delta(x_0).$$

Beweis: Zu $\varepsilon = |g(x_0)|/2 > 0$ gibt es aufgrund der Stetigkeit ein $\delta > 0$ mit $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in D \cap U_\delta(x_0)$, also folgt mit der Dreiecksungleichung für diese x

$$|g(x)| = |g(x_0) - (g(x_0) - g(x))| \geq |g(x_0)| - |g(x) - g(x_0)| \geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon.$$

$\square$

Satz 1.2 (Stetigkeitsregeln)

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$. Dann gilt:

(1) Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $\alpha f + \beta g$ stetig in x_0.

(2) Die Funktion fg ist stetig in x_0.

(3) Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist die Funktion $f/g : D \cap U_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$ für $\delta > 0$ hinreichend klein definiert und stetig in x_0.

Beweis: Die Funktionen sind grundsätzlich punktweise erklärt, das heißt für alle $x \in D$ gilt

$$(\alpha f+\beta g)(x) = \alpha f(x)+\beta g(x),\ (fg)(x) = f(x)g(x) \text{ und } (f/g)(x) = f(x)/g(x).$$

Wir führen die Aussagen auf die entsprechenden Konvergenzregeln für Folgen zurück: sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $x_n \in D$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Nach Satz 1.1 gilt $f(x_n) \to f(x_0)$ und $g(x_n) \to g(x_0)$ mit $n \to \infty$. Aus Kapitel I, Satz 1.3 folgt

$$\alpha f(x_n)+\beta g(x_n) \to \alpha f(x_0)+\beta g(x_0) \text{ und } f(x_n)g(x_n) \to f(x_0)g(x_0).$$

Mit Satz 1.1 ergeben sich die Behauptungen (1) und (2).

In der Situation von (3) gibt es nach Lemma 1.3 ein $\delta > 0$ mit $g(x) \neq 0$ auf $D \cap U_\delta(x_0)$, so dass f/g dort definiert ist. Weiter folgt $f(x_n)/g(x_n) \to f(x_0)/g(x_0)$, und mit Satz 1.1 ist auch f/g stetig in x_0. $\square$

Folgerung 1.1

Die Menge $C^0(D)$ der stetigen Funktionen auf $D \subset \mathbb{R}^n$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Allgemeiner ist die Menge $C^0(D, \mathbb{R}^k)$ der stetigen Abbildungen $f : D \to \mathbb{R}^k$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Beweis: Das ist offensichtlich nach Satz 1.2(1) und Lemma 1.2. $\square$

Satz 1.3 (Verkettung stetiger Funktionen)

Seien $f : D \to \mathbb{R}^m$, $g : E \to \mathbb{R}^k$ mit $f(D) \subset E \subset \mathbb{R}^m$. Ist f stetig in x_0 und g stetig in $y_0 = f(x_0)$, so ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}^k$ stetig in x_0.

Beweis: Wir verwenden wieder Satz 1.1. Ist $x_n \in D$ eine beliebige Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, so folgt $f(x_n) \to f(x_0)$ aus der Stetigkeit von f in x_0, und weiter $g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$ wegen der Stetigkeit von g in $y_0 = f(x_0)$. Nach Satz 1.1 ist damit die Stetigkeit von $g \circ f$ in x_0 schon gezeigt. $\square$

Beispiel 1.14

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist auch die Funktion $|f| : D \to \mathbb{R}$ stetig, und ebenso die Funktionen $\max(f, g) = (f + g + |f - g|)/2$ und $\min(f, g) = (f + g - |f - g|)/2$.

Schließlich wollen wir in diesem Abschnitt noch den Grenzwertbegriff für Funktionen diskutieren; allerdings fassen wir uns dabei kurz, weil die Angelegenheit für Folgen ja ausführlich behandelt wurde.

Definition 1.3 (Grenzwert für Funktionen)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und x_0 ein Häufungspunkt von D. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ konvergiert für $x \to x_0$ gegen $a \in \mathbb{R}^m$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt:

$$|f(x) - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Notation: $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ oder $f(x) \to a$ für $x \to x_0$.

Für die Existenz und den Wert von $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ist es egal, ob die Funktion in x_0 definiert ist bzw. welchen Funktionswert sie dort hat. Die Beziehung zwischen Grenzwert und Stetigkeit ist wie folgt:

Lemma 1.4 (Stetigkeit und Grenzwert)

Sei $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D. Für die Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(2) f ist stetig in x_0.

Beweis: Das folgt direkt aus den gegebenen Definitionen. $\square$