Analysis I

Guofang Wang

Universität Freiburg

13.12.2016

Definition 1.1 (Stetigkeit)

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in D$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta. \tag{1.1}$$

f heißt stetig, falls f in allen $x_0 \in D$ stetig ist.

Mithilfe von Umgebungen lässt sich die Stetigkeit in x_0 auch so fassen:

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$f(D \cap B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0)).$$

Beispiel 1.11

Die charakteristische Funktion von $\mathbb{Q}$ *(oder Dirichlet-Funktion)*

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ist nirgends stetig. Denn wäre $\chi_{\mathbb{Q}}$ *stetig in* $x_0 \in \mathbb{R}$, *so gibt es zu* $\varepsilon = 1$ *ein* $\delta > 0$ *mit*

$$|\chi_{\mathbb{Q}}(x) - \chi_{\mathbb{Q}}(x_0)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Ist $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, *so können wir* $x \in \mathbb{Q}$ *wählen, da* $\mathbb{Q}$ *dicht in* $\mathbb{R}$ *ist nach Satz 2.8, und erhalten* $1 = |\chi_{\mathbb{Q}}(x) - \chi_{\mathbb{Q}}(x_0)| < \varepsilon = 1$, *ein Widerspruch.*
Ist $x_0 \in \mathbb{Q}$, *so können wir analog argumentieren, da* $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *ebenfalls dicht ist nach Aufgabe 2, Serie 4.*

Ein sehr nützliches, hinreichendes Kriterium für die Stetigkeit ist das folgende.

Definition 1.2 (Lipschitzstetigkeit)

$f : D \to \mathbb{R}^m$ heißt Lipschitzstetig mit Konstante $L \in [0, \infty)$, falls gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in D.$$

Die Euklidische Norm ist Lipschitzstetig mit Konstante $L = 1$, vgl. Beispiel 1.10.

Lemma 1.1

Jede Lipschitzstetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ ist stetig.

Beweis: Sei f Lipschitzstetig mit Konstante $L > 0$. Zu $x_0 \in D$ und gegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta = \varepsilon/L > 0$, und erhalten für $|x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| < L\delta = \varepsilon.$$

$\square$

Beispiel 1.12

Die Abstandsfunktion $\mathrm{dist}_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *einer Menge* $E \subset \mathbb{R}^n$ *ist Lipschitzstetig mit Konstante Eins. Denn es gilt nach der Dreiecksungleichung*

$$|y - x_2| \le |y - x_1| + |x_1 - x_2| \quad \text{für alle } x_{1,2} \in \mathbb{R}^n,\ y \in E.$$

Bilden wir auf beiden Seiten das Infimum über alle $y \in E$*, so folgt*

$$\mathrm{dist}_E(x_2) \le \mathrm{dist}_E(x_1) + |x_1 - x_2|.$$

Durch Vertauschen von x_1 *mit* x_2 *ergibt sich*

$$|\mathrm{dist}_E(x_1) - \mathrm{dist}_E(x_2)| \le |x_1 - x_2|.$$

Beispiel 1.13

Lineare Abbildungen $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sind Lipschitzstetig. Um dies zu zeigen, verwenden wir die Matrixdarstellung bezüglich der Standardbasen. Es gilt für $x \in \mathbb{R}^n$

$$A(x)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad \text{wobei } A(x) = \sum_{i=1}^{m} A(x)_i e_i.$$

Die Euklidische Norm der Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist

$$|A| = \Big(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \Big)^{1/2}.$$

Mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz folgt

$$|A(x)|^2 = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \Big)^2 \leq \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \Big) \cdot \Big(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \Big) = |A|^2 |x|^2,$$

das heißt es gilt die Abschätzung

$$|A(x)| \leq |A|\,|x| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Insbesondere folgt für $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|A(x) - A(y)| = |A(x-y)| \leq |A|\,|x-y|,$$

d. h. A ist Lipschitzstetig mit Konstante $|A|$.

Satz 1.1 (Folgenkriterium der Stetigkeit)

Für $f : D \to \mathbb{R}^m$ und $x_0 \in D$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) *f ist stetig in x_0.*

(2) *Für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k \in D$ und $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ gilt: $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0)$.*

Beweis: Für die Implikation $(1) \Rightarrow (2)$ sei $x_k \in D$ mit $x_k \to x_0$ für $k \to \infty$. Wähle zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$. Es gibt ein $N \in \mathbb{R}$ mit $|x_k - x_0| < \delta$ für $k > N$, also folgt $|f(x_k) - f(x_0)| < \varepsilon$ für $k > N$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Wir überlegen nun was es bedeutet, wenn f nicht stetig in x_0 ist. Es gibt dann ein $\varepsilon > 0$, so dass (1.1) für kein $\delta > 0$ erfüllt ist. (Aufgabe 2, Serie 1) Wählen wir $\delta_k = 1/k$ für $k = 1, 2, \ldots$, so gibt es $x_k \in D$ mit $|x_k - x_0| < 1/k$, aber $|f(x_k) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Ein Widerspruch zu (2). Dies zeigt indirekt die Implikation $(2) \Rightarrow (1)$, womit der Satz bewiesen ist. $\square$

Lemma 1.2

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann stetig in $x_0 \in D$, wenn jede Koordinatenfunktion $f_i : D \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig ist.

Beweis: Mit dem vorangegangenen Satz folgt dies aus der Äquivalenz von Konvergenz und Konvergenz der Koordinatenfolgen im $\mathbb{R}^m$, siehe Satz 3.6. $\square$

Lemma 1.3

Sei $g : D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0 mit $g(x_0) \neq 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|g(x)| \geq |g(x_0)|/2 > 0 \quad \text{für alle } x \in D \cap U_\delta(x_0).$$

Beweis: Zu $\varepsilon = |g(x_0)|/2 > 0$ gibt es aufgrund der Stetigkeit ein $\delta > 0$ mit $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in D \cap U_\delta(x_0)$, also folgt mit der Dreiecksungleichung für diese x

$$|g(x)| = |g(x_0) - (g(x_0) - g(x))| \geq |g(x_0)| - |g(x) - g(x_0)| \geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon.$$

$\square$

Satz 1.2 (Stetigkeitsregeln)

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$. Dann gilt:

(1) Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $\alpha f + \beta g$ stetig in x_0.

(2) Die Funktion fg ist stetig in x_0.

(3) Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist die Funktion $f/g : D \cap U_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$ für $\delta > 0$ hinreichend klein definiert und stetig in x_0.

Beweis: Die Funktionen sind grundsätzlich punktweise erklärt, das heißt für alle $x \in D$ gilt

$$(\alpha f+\beta g)(x) = \alpha f(x)+\beta g(x),\ (fg)(x) = f(x)g(x) \text{ und } (f/g)(x) = f(x)/g(x).$$

Wir führen die Aussagen auf die entsprechenden Konvergenzregeln für Folgen zurück: sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $x_n \in D$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Nach Satz 1.1 gilt $f(x_n) \to f(x_0)$ und $g(x_n) \to g(x_0)$ mit $n \to \infty$. Aus Kapitel I, Satz 1.3 folgt

$$\alpha f(x_n)+\beta g(x_n) \to \alpha f(x_0)+\beta g(x_0) \text{ und } f(x_n)g(x_n) \to f(x_0)g(x_0).$$

Mit Satz 1.1 ergeben sich die Behauptungen (1) und (2).

In der Situation von (3) gibt es nach Lemma 1.3 ein $\delta > 0$ mit $g(x) \neq 0$ auf $D \cap U_\delta(x_0)$, so dass f/g dort definiert ist. Weiter folgt $f(x_n)/g(x_n) \to f(x_0)/g(x_0)$, und mit Satz 1.1 ist auch f/g stetig in x_0. $\square$

Folgerung 1.1

Die Menge $C^0(D)$ der stetigen Funktionen auf $D \subset \mathbb{R}^n$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Allgemeiner ist die Menge $C^0(D, \mathbb{R}^k)$ der stetigen Abbildungen $f : D \to \mathbb{R}^k$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Beweis: Das ist offensichtlich nach Satz 1.2(1) und Lemma 1.2. $\square$

Satz 1.3 (Verkettung stetiger Funktionen)

Seien $f : D \to \mathbb{R}^m$, $g : E \to \mathbb{R}^k$ mit $f(D) \subset E \subset \mathbb{R}^m$. Ist f stetig in x_0 und g stetig in $y_0 = f(x_0)$, so ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}^k$ stetig in x_0.

Beweis: Wir verwenden wieder Satz 1.1. Ist $x_n \in D$ eine beliebige Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, so folgt $f(x_n) \to f(x_0)$ aus der Stetigkeit von f in x_0, und weiter $g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$ wegen der Stetigkeit von g in $y_0 = f(x_0)$. Nach Satz 1.1 ist damit die Stetigkeit von $g \circ f$ in x_0 schon gezeigt. $\square$

Beispiel 1.14

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist auch die Funktion $|f| : D \to \mathbb{R}$ stetig, und ebenso die Funktionen $\max(f,g) = (f+g+|f-g|)/2$ und $\min(f,g) = (f+g-|f-g|)/2$.

Schließlich wollen wir in diesem Abschnitt noch den Grenzwertbegriff für Funktionen diskutieren; allerdings fassen wir uns dabei kurz, weil die Angelegenheit für Folgen ja ausführlich behandelt wurde.

Definition 1.3 (Grenzwert für Funktionen)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und x_0 ein Häufungspunkt von D. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ konvergiert für $x \to x_0$ gegen $a \in \mathbb{R}^m$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt:

$$|f(x) - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Notation: $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ oder $f(x) \to a$ für $x \to x_0$.

Für die Existenz und den Wert von $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ist es egal, ob die Funktion in x_0 definiert ist bzw. welchen Funktionswert sie dort hat. Die Beziehung zwischen Grenzwert und Stetigkeit ist wie folgt:

Lemma 1.4 (Stetigkeit und Grenzwert)

Sei $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D. Für die Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(2) f ist stetig in x_0.

Beweis: Das folgt direkt aus den gegebenen Definitionen. $\square$

Für reellwertige Funktionen können wir den Konvergenzbegriff ausdehnen, indem wir (uneigentliche) Konvergenz gegen $\pm\infty$ zulassen.

Definition 1.4 (Uneigentlicher Grenzwert)

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D, und $f : D \to \mathbb{R}$. Dann gilt $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, wenn es zu jedem $K > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$f(x) > K \qquad \text{für alle } x \in D \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Entsprechend wird $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ erklärt.

Im Fall $D \subset \mathbb{R}$ besteht die Möglichkeit, Grenzwerte von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$ zu betrachten.

Definition 1.5 (Grenzwert bei $\pm\infty$)

Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$ mit $D \subset \mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt. Dann gilt $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}^m$, wenn es zu $\varepsilon > 0$ ein $K \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$|f(x) - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } x > K.$$

Analog wird der Grenzwert für $x \to -\infty$ erklärt.

Sowohl bei der Stetigkeit als auch beim Grenzwert spielt der zugrundeliegende Definitionsbereich eine Rolle. Wir schreiben $\lim_{x \to x_0, x \in D} f(x)$, wenn wir den gewählten Definitionsbereich hervorheben möchten.

In $\mathbb{R}$ werden oft einseitige Grenzwerte gebraucht:

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0, x > x_0} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0, x < x_0} f(x).$$

Zum Beispiel ist $\lim_{x \searrow 0} \operatorname{sign}(x) = +1$ und $\lim_{x \nearrow 0} \operatorname{sign}(x) = -1$, während der Grenzwert $\lim_{x \to 0} \operatorname{sign}(x)$ nicht existiert.

Wir formulieren jetzt die wichtigsten Regeln für Grenzwerte von Funktionen. Diese sind für Folgen bzw. aus der Diskussion der Stetigkeit schon bekannt, deshalb verzichten wir auf die Beweise und formulieren die Aussagen der Einfachheit halber nur für $n = m = 1$, also reellwertige Funktionen einer Variablen.

Satz 1.4 (Rechenregeln für Grenzwerte)

Es gelten folgende Aussagen:

(1) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Aus $f(x) \to a$, $g(x) \to b$ für $x \to x_0$ folgt

$$\begin{aligned} \alpha f(x) + \beta g(x) &\to \alpha a + \beta b \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}), \\ f(x)g(x) &\to ab, \\ f(x)/g(x) &\to a/b, \qquad \text{falls } b \neq 0. \end{aligned}$$

(2) Seien $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subset E$. Gilt $f(x) \to y_0$ mit $x \to x_0$ und ist g stetig in y_0, so folgt $(g \circ f)(x) \to g(y_0)$ mit $x \to x_0$.

(3) Sei $f(x) \to a$, $g(x) \to b$ für $x \to x_0$. Ist $f(x) \leq g(x)$ für $0 < |x - x_0| < \delta$, so folgt $a \leq b$.

(4) Ist $f > 0$ auf D, so ist $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ äquivalent zu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

Beispiel 1.15 (Rationale Funktionen)

Seien p, q reelle Polynome vom Grad m bzw. n, also $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$ bzw. $q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$ mit $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ und $a_m, b_n \neq 0$. Setze $N = \{x \in \mathbb{R} : q(x) = 0\}$ und definiere

$$f : \mathbb{R}\backslash N \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Wann hat f eine stetige Fortsetzung bei $x_0 \in N$? Sei dazu x_0 eine ν-fache Nullstelle von q mit $\nu \geq 1$, und eine μ-fache Nullstelle von p, evtl. $\mu = 0$ falls $p(x_0) \neq 0$. Also gilt

$$p(x) = (x - x_0)^{\mu}\, \tilde{p}(x) \quad \text{bzw.} \quad q(x) = (x - x_0)^{\nu} \tilde{q}(x)$$

für Polynome $\tilde{p}, \tilde{q}$ mit $\tilde{p}(x_0), \tilde{q}(x_0) \neq 0$. Es folgt

$$f(x) = (x - x_0)^{\mu-\nu} \frac{\tilde{p}(x)}{\tilde{q}(x)} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\backslash N,$$

Fortsetzung von Beispiel 1.15

und wir erhalten aus den Rechenregeln für Grenzwerte
$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ im Fall $\mu > \nu$ und
$\lim_{x \to x_0} f(x) = \tilde{p}(x_0)/\tilde{q}(x_0) \neq 0$ im Fall $\mu = \nu$.

In diesen Fällen ist die Funktion stetig fortsetzbar nach Lemma 1.5, dagegen hat f im Fall $\mu < \nu$ in x_0 eine Polstelle. Sei zum Beispiel $\tilde{p}(x_0)/\tilde{q}(x_0) > 0$, dann ergibt sich für die einseitigen Grenzwerte bei x_0

	$x \searrow x_0$	$x \nearrow x_0$
$\nu - \mu$ gerade	$+\infty$	$+\infty$
$\nu - \mu$ ungerade	$+\infty$	$-\infty$

Das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$ wurde bereits in Kapitel 1, Beispiel 1.7 untersucht.