Analysis I

Guofang Wang

Universität Freiburg

20.12.2016

Definition 1.1 (Ableitung)

Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}^n$ hat in $x_0 \in I$ die Ableitung $a \in \mathbb{R}^n$ (Notation: $f'(x_0) = a$), falls gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a. \tag{1.1}$$

Wir nennen f differenzierbar in x_0, falls es ein $a \in \mathbb{R}^n$ mit (1.1) gibt, falls also der in (1.1) betrachtete Grenzwert existiert.

Eine alternative Formulierung ergibt sich durch die Substitution $x = x_0 + h$:

$$f'(x_0) = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a.$$

Lemma 1.1

Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann in $x_0 \in I$ differenzierbar, wenn alle Koordinatenfunktionen $f_i : I \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, in x_0 differenzierbar sind. Die Ableitung kann dann koordinatenweise berechnet werden, das heißt es gilt:

$$f'(x_0) = ((f_1)'(x_0), \ldots, (f_n)'(x_0)) \in \mathbb{R}^n.$$

Definition 1.2 (Ableitungsfunktion)

Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}^n$ heißt differenzierbar auf I (oder einfach differenzierbar), falls f in jedem Punkt $x_0 \in I$ differenzierbar ist. Die hierdurch gegebene Funktion

$$f' : I \to \mathbb{R}^n, \quad x_0 \mapsto f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}^n$$

heißt Ableitungsfunktion oder schlicht Ableitung von f.

Beispiel 1.1

Für eine konstante Funktion, also $f(x) = c \in \mathbb{R}^n$ *für alle* $x \in I$*, gilt für* $x \neq x_0$*:*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0 \text{ bzw. } f' = 0.$$

Beispiel 1.2

Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$*, gilt*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \qquad \text{für alle } x \neq x_0,$$

also folgt $f'(x_0) = 1$.

Beispiel 1.3

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

und

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{-x}{x} = -1.$$

Die rechts- und linksseitige Ableitung existieren in $x_0 = 0$, sie sind aber verschieden.

Satz 1.1

Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist differenzierbar mit Ableitung* $\exp' = \exp$.

Beweis: Für $x = 0$ folgt die Aussage aus Satz 4.7 in Kapitel 2, und zwar mit $n = 2$:

$$\left| \frac{e^x - e^0}{x - 0} - e^0 \right| = \left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| = \frac{|e^x - (1 + x)|}{|x|} \leq |x| \to 0 \qquad \text{mit } x \to 0.$$

Für $x \neq 0$ schließen wir weiter mit der Funktionalgleichung

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \, \frac{e^h - 1}{h} \to e^x \qquad \text{mit } h \to 0.$$

$\square$

Satz 1.2

Die Abbildung $c : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $c(t) = e^{it}$, ist differenzierbar mit Ableitung $c' = ic$. Insbesondere sind auch $\cos$ und $\sin$ differenzierbar und es gilt

$$\cos' = -\sin \quad \text{und} \quad \sin' = \cos\,.$$

BEWEIS: Für die Ableitung in $t = 0$ verwenden wir wieder Satz 4.7 in Kapitel 2, mit $n = 2$,

$$\left|\frac{c(t) - c(0)}{t - 0} - ic(0)\right| = \left|\frac{e^{it} - 1}{t} - i\right| = \frac{|e^{it} - (1 + it)|}{|t|} \le |t| \to 0, \text{ mit } t \to 0.$$

Für beliebige t ergibt sich mit der Funktionalgleichung

$$\frac{c(t+h) - c(t)}{h} = \frac{e^{i(t+h)} - e^{it}}{h} = e^{it}\,\frac{e^{ih} - 1}{h} \to ie^{it} = ic(t) \quad \text{für } h \to 0.$$

Lemma 1.1 besagt nun, dass $\cos$ und $\sin$ als Koordinatenfunktionen von c ebenfalls differenzierbar sind mit Ableitung $c'(t) = \cos'(t) + i\sin'(t)$. Wegen $ic(t) = -\sin t + i\cos t$ folgt $\cos' = -\sin$ und $\sin' = \cos$ wie behauptet. $\square$

Die Funktion f ist genau dann in x_0 differenzierbar, wenn f mit einer affinlinearen Funktion übereinstimmt bis auf einen Fehler, der schneller als linear verschwindet.

Lemma 1.2

Genau dann hat $f : I \to \mathbb{R}^n$ in $x_0 \in I$ die Ableitung $a \in \mathbb{R}^n$, wenn für die Differenzfunktion $r(h) = f(x_0 + h) - (f(x_0) + ah)$ gilt:

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0. \tag{1.3}$$

Beweis: Für $h \neq 0$ gilt

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - a = \frac{f(x_0 + h) - (f(x_0) + a\,h)}{h} = \frac{r(h)}{h}.$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung. □

Satz 1.3 (Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit)

Ist $f : I \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar in $x_0 \in I$, so ist f auch stetig in x_0.

BEWEIS: Nach Lemma 1.4 in Kapitel 3 reicht es zu zeigen, dass $\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$. Aber für $h \neq 0$ gilt nach Lemma 1.2

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\,\frac{r(h)}{h} \to f(x_0) \text{ mit } h \to 0.$$

$\square$

Satz 1.4. (Differentiationsregeln)

Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$. Dann sind auch die Funktionen $\alpha f + \beta g$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), fg und f/g (im Fall $g(x_0) \neq 0$) in x_0 differenzierbar mit folgenden Ableitungen:

(1) Linearität:

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

(2) Produktregel:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

(3) Quotientenregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

BEWEIS: Wir müssen jeweils für $x \neq x_0$ die Differenzenquotienten bilden und zeigen, dass diese mit $x \to x_0$ gegen das gewünschte konvergieren. Für (1) haben wir

$$\begin{aligned} & \frac{(\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(x_0) + \beta g(x_0))}{x - x_0} \\ = \quad & \alpha \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \beta \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ \to \quad & \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0). \end{aligned}$$

Natürlich gilt die Aussage mit demselben Argument auch für vektorwertige Funktionen. Die Produktregel folgt durch „Mischen der Terme“:

$$\begin{aligned} & \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ = \quad & \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ \to \quad & f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0), \end{aligned}$$

wobei die Stetigkeit von g in x_0 benutzt wurde (Satz 1.3).

Wir zeigen die Quotientenregel zunächst für die Funktion $1/g$, also $f \equiv 1$. Es gibt ein $\delta > 0$ mit $g(x) \neq 0$ für $|x - x_0| < \delta$ nach Kapitel 3, Lemma 1.3. Für diese $x \in I$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{x - x_0}\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right) &= -\frac{1}{g(x)g(x_0)}\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &\to -\frac{1}{g(x_0)^2}\, g'(x_0) \quad \text{mit } x \to x_0. \end{aligned}$$

Für beliebiges f schreiben wir $f/g = f \cdot \frac{1}{g}$ und verwenden die Produktregel. $\square$

Beispiel 1.4

Für $f_n(x) = x^n$ *folgt aus Beispiel 1.2, also* $f_1' = 1$*, und der Produktregel*

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= (f_1 f_{n-1})'(x) \\ &= f_1'(x) f_{n-1}(x) + f_1(x) f_{n-1}'(x) = x^{n-1} + x\, f_{n-1}'(x), \end{aligned}$$

und damit per Induktion $f_n'(x) = n x^{n-1}$*. Allgemeiner ergibt sich mit Satz 1.4 (1) für Polynome* $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ *die Formel*

$$p'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} x^j.$$

Beispiel 1.5

Für $f(x) = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, *gilt* $f'(x) = -nx^{-n-1}$ *nach der Quotientenregel:*

$$f'(x) = -\frac{nx^{n-1}}{(x^n)^2} = -nx^{-n-1}.$$

Satz 1.5 (Kettenregel)

Seien $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ mit $f(I) \subset J$. Ist f in $x_0 \in I$ differenzierbar und g in $y_0 = f(x_0) \in J$ differenzierbar, so ist auch $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und hat die Ableitung

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big)\, f'(x_0).$$

BEWEIS: Wir betrachten wieder für $x \neq x_0$ den Differenzenquotienten:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \begin{cases} \dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \, \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{falls } f(x) \neq f(x_0) \\ 0 & \text{falls } f(x) = f(x_0). \end{cases}$$

Wir definieren die Funktion

$$a : J \to \mathbb{R},\; a(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} & \text{für } y \neq f(x_0) \\ g'(f(x_0)) & \text{für } y = f(x_0). \end{cases}$$

Es ist a stetig in $f(x_0)$ nach Kapitel 3, Lemma 1.4. Mit $x \to x_0$ folgt, da $f(x) \to f(x_0)$,

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = a(f(x))\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to a(f(x_0))\, f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

$\square$

Satz 1.6 (Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton und stetig auf dem offenen Intervall I, und differenzierbar in x_0 mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist $I^* = f(I)$ ein offenes Intervall, und die Umkehrfunktion $g : I^* \to I$ ist differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ mit Ableitung

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'\big(g(y_0)\big)}.$$

Beweis: Nach Satz 2.2 in Kapitel 3 mit Zusatz (2.1) ist I^* ein offenes Intervall und $g : I^* \to \mathbb{R}$ streng monoton und stetig, insbesondere $g(y) \to g(y_0) = x_0$ mit $y \to y_0$. Für $y \neq y_0$ folgt

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{g(y) - g(y_0)}{f(g(y)) - f(g(y_0))} = \frac{1}{\frac{f(g(y)) - f(g(y_0))}{g(y) - g(y_0)}} \to \frac{1}{f'(x_0)}.$$

$\square$

Seien I, I^* offene Intervalle, $f : I \to I^*$ bijektiv und in x_0 differenzierbar. Ist die Umkehrfunktion $g : I^* \to I$ in $y_0 = f(x_0)$ auch differenzierbar, so folgt schon aus der Kettenregel

$$g(f(x)) = x \quad \Rightarrow \quad g'(f(x_0))f'(x_0) = 1.$$

Insbesondere muss $f'(x_0) \neq 0$ sein, und es gilt die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, ist streng monoton wachsend und stetig; ihre Umkehrfunktion lautet

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(y) = \begin{cases} y^{1/3} & \text{für } y \geq 0 \\ -|y|^{1/3} & \text{für } y \leq 0. \end{cases}$$

Die Umkehrfunktion ist nicht differenzierbar in $y = 0$, denn es gilt

$$\frac{g(y) - g(0)}{y - 0} = |y|^{-2/3} \to +\infty \text{ mit } y \to 0.$$

Die Voraussetzung des Satzes ist hier verletzt, es ist $f'(0) = 0$.