

Analysis I

Guofang Wang

Universität Freiburg

10.1.2017, 11.1.2017

Definition 1.1 (Ableitung)

Die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ hat in $x_0 \in I$ die **Ableitung** $a \in \mathbb{R}^n$ (Notation: $f'(x_0) = a$), falls gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a. \quad (1.1)$$

Wir nennen f **differenzierbar** in x_0 , falls es ein $a \in \mathbb{R}^n$ mit (1.1) gibt, falls also der in (1.1) betrachtete Grenzwert existiert.

Eine alternative Formulierung ergibt sich durch die Substitution $x = x_0 + h$:

$$f'(x_0) = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a.$$

Satz 1.1

Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit Ableitung

$$\exp' = \exp.$$

Satz 1.2

$$\cos' = -\sin, \quad \sin' = \cos.$$

Satz 1.3 (Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit)

Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar in $x_0 \in I$, so ist f auch stetig in x_0 .

Satz 1.4. (Differentiationsregeln)

Seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$. Dann sind auch die Funktionen $\alpha f + \beta g$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), fg und f/g (im Fall $g(x_0) \neq 0$) in x_0 differenzierbar mit folgenden Ableitungen:

(1) Linearität:

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

(2) Produktregel:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

(3) Quotientenregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Satz 1.5 (Kettenregel)

Seien $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(I) \subset J$. Ist f in $x_0 \in I$ differenzierbar und g in $y_0 = f(x_0) \in J$ differenzierbar, so ist auch $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und hat die Ableitung

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0).$$

Beweis: Wir betrachten wieder für $x \neq x_0$ den Differenzenquotienten:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \begin{cases} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{falls } f(x) \neq f(x_0) \\ 0 & \text{falls } f(x) = f(x_0) \end{cases}$$

Wir definieren die Funktion

$$a : J \rightarrow \mathbb{R}, a(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} & \text{für } y \neq f(x_0) \\ g'(f(x_0)) & \text{für } y = f(x_0). \end{cases}$$

Es ist a stetig in $f(x_0)$ nach Kapitel 3, Lemma 1.4. Mit $x \rightarrow x_0$ folgt, da $f(x) \rightarrow f(x_0)$,

$$\begin{aligned} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} &= a(f(x)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &\rightarrow a(f(x_0)) f'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0). \end{aligned}$$

Satz 1.6 (Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion)

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton und stetig auf dem offenen Intervall I , und differenzierbar in x_0 mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist $I^* = f(I)$ ein offenes Intervall, und die Umkehrfunktion $g : I^* \rightarrow I$ ist differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ mit Ableitung

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

Beweis: Nach Satz 2.2 in Kapitel 3 mit Zusatz (2.1) ist I^* ein offenes Intervall und $g : I^* \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton und stetig, insbesondere $g(y) \rightarrow g(y_0) = x_0$ mit $y \rightarrow y_0$. Für $y \neq y_0$ folgt

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{g(y) - g(y_0)}{f(g(y)) - f(g(y_0))} = \frac{1}{\frac{f(g(y)) - f(g(y_0))}{g(y) - g(y_0)}} \rightarrow \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Bemerkung. Seien I, I^* offene Intervalle, $f : I \rightarrow I^*$ bijektiv und in x_0 differenzierbar. Ist die Umkehrfunktion $g : I^* \rightarrow I$ in $y_0 = f(x_0)$ auch differenzierbar, so folgt schon aus der Kettenregel

$$g(f(x)) = x \quad \Rightarrow \quad g'(f(x_0))f'(x_0) = 1.$$

Insbesondere muss $f'(x_0) \neq 0$ sein, und es gilt die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion.

Beispiel.

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, ist streng monoton wachsend und stetig; ihre Umkehrfunktion lautet

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(y) = \begin{cases} y^{1/3} & \text{für } y \geq 0 \\ -|y|^{1/3} & \text{für } y \leq 0. \end{cases}$$

Die Umkehrfunktion ist aber nicht differenzierbar in $y = 0$, denn es gilt

$$\frac{g(y) - g(0)}{y - 0} = |y|^{-2/3} \rightarrow +\infty \text{ mit } y \rightarrow 0.$$

Grund: Die Voraussetzung des Satzes ist hier verletzt, es ist $f'(0) = 0$.

Die beiden vorangegangenen Regeln sind in der von Leibniz eingeführten Notation besonders suggestiv. Leibniz schreibt Funktionen in der Form $y = y(x)$ und bezeichnet die Ableitung mit dem Symbol $\frac{dy}{dx}$, das auch als *Differentialquotient* bezeichnet wird. Formal ergeben sich die Kettenregel und die Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion dann aus der Bruchrechnung:

$$y = y(x), z = z(y) \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx},$$
$$y = y(x), x = x(y) \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}.$$

Bei der Anwendung dieser saloppen Notation ist jedoch darauf zu achten, wo die jeweiligen Funktionen definiert sind.

Satz 1.7

Die Funktion $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit Ableitung

$$\log'(y) = \frac{1}{y}.$$

Beweis: Dies folgt aus Satz 1.1 und Satz 1.6, genauer ist

$$\log'(y) = \frac{1}{\exp'(\log y)} = \frac{1}{\exp(\log y)} = \frac{1}{y}.$$

□

Als eine Anwendung von Satz 1.7 haben wir einen zweiten Beweis von

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Es folgt aus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \log'(1) = 1$$

und die Stetigkeit von \exp .

Beispiel 1.6

Die Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ ist Verkettung der Funktionen $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \alpha \log(x)$.
Mit der Kettenregel berechnen wir

$$f'(x) = \exp'(h(x))h'(x) = \exp(\alpha \log(x)) \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Beispiel 1.7

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ mit $a > 0$, ist Verkettung von \exp und $h(x) = \log(a)x$, deshalb folgt

$$f'(x) = \exp'(h(x))h'(x) = \exp(\log(a)x) \log(a) = \log(a)a^x.$$

Beispiel 1.8

Die Differenzierbarkeit der Arcusfunktionen auf dem offenen Intervall $(-1, 1)$ folgt aus den Sätzen 1.2 und 1.6.

Beachtet man $\cos^2 + \sin^2 = 1$ sowie $\arccos x \in (0, \pi)$ bzw. $\arcsin x \in (-\pi/2, \pi/2)$, so erhält man

$$\arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$\arctan'(x), \quad \operatorname{arccot}'(x)?$$

(Übung)

2. Mittelwertsatz und Anwendungen

Es ist ein zentrales Problem der Analysis, aus Eigenschaften der Ableitung auf Eigenschaften der Funktion selbst zu schließen.

Der **Mittelwertsatz** ist dafür ein einfaches und effektives Hilfsmittel.

Für seinen Beweis müssen wir allerdings erst über Extremwerte – **Maxima** und **Minima** – von stetigen Funktionen sprechen.

Da sich keine Unterschiede ergeben, betrachten wir dabei gleich reellwertige Funktionen auf einer Teilmenge des \mathbb{R}^n .

Wir benötigen einen Satz, der die Existenz von Extremalstellen für eine stetige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ allgemein garantiert.

Ohne Voraussetzungen an D kann das nicht gehen, wie etwa das folgende Beispiel zeigt:

$$f : D = (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Hier wird weder das Supremum $\sup_{x \in D} f(x) = 1$ noch das Infimum $\inf_{x \in D} f(x) = 0$ durch die Funktion angenommen.

Satz 2.1 (Existenz von Extremalstellen)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer, abgeschlossen und beschränkt, und sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und nimmt sein Infimum und Supremum an, das heißt es gibt $x_0, x_1 \in D$ mit

$$f(x_0) = \inf_{x \in D} f(x) \quad \text{und} \quad f(x_1) = \sup_{x \in D} f(x).$$

Beweis: Setze $\alpha = \inf_{x \in D} f(x) \in [-\infty, \infty)$. Wir zeigen die Existenz eines $x_0 \in D$ mit $f(x_0) = \alpha$, daraus folgt insbesondere $\alpha > -\infty$, das heißt f ist nach unten beschränkt.

1. Nach Def. des Infimums: \exists eine Folge $x_k \in D$ mit $f(x_k) \rightarrow \alpha$.
2. Da D beschränkt, ist die Folge $\{x_k\}$ beschränkt.
3. Nach Bolzano-Weierstraß, gibt es eine Teilfolge x_{k_j} und ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $x_{k_j} \rightarrow x_0$ für $j \rightarrow \infty$.
4. Aus D abgeschlossen, folgt $x_0 \in D$.
5. Aber dann gilt wegen der Stetigkeit von f

$$-\infty < f(x_0) = \lim_{j \rightarrow \infty} f(x_{k_j}) = \alpha.$$

Im Beweis spielte die folgende Eigenschaft von D eine Rolle:

Definition 2.1 (Folgenkompaktheit)

Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **folgenkompakt**, wenn es zu jeder Folge $x_k \in D$ eine Teilfolge x_{k_j} gibt, die konvergiert und deren Grenzwert in D liegt:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_j} = x_0 \in D.$$

Wir halten aus dem Beweis von Satz 2.1 folgende Beobachtung fest:

Satz 2.2 (Kompaktheit)

Für $D \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

- (1) D ist folgenkompakt.
- (2) D ist abgeschlossen und beschränkt.

Beweis: (2) \Rightarrow (1) wurde im Beweis von Satz 2.1 gezeigt.
(1) \Rightarrow (2). Jetzt setzen wir (1) voraus.

Abgeschlossenheit von D : Sei $x_k \in D$ eine beliebige Folge mit $x_k \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}^n$. Da D folgenkompakt, gibt es eine Teilfolge x_{k_j} , die gegen ein $x'_0 \in D$ konvergiert. Aus der Eindeutigkeit des Grenzwerts folgt $x_0 = x'_0 \in D$, also ist D abgeschlossen.

Beschränktheit von D : Wäre D nicht beschränkt, so gibt es zu $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in D$ mit $|x_k| \geq k$. Da D kompakt, existiert eine konvergente Teilfolge x_{k_j} , und diese ist nach Satz 1.2 in Kapitel 1 beschränkt, ein Widerspruch. □

Wir kommen jetzt wieder zurück zur eindimensionalen Situation.

Definition 2.2 (Lokale Extrema)

Die Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in (a, b)$ ein **lokales Minimum**, falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt:

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{für alle } x \in U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Ist sogar $f(x_0) < f(x)$ für $x \in U_\delta(x_0)$, $x \neq x_0$, so heißt **das lokale Minimum isoliert**. Ein (isoliertes) lokales Maximum ist entsprechend definiert.

Satz 2.3 (notwendige Bedingung für Extrema)

Die Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ habe in $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Extremum. Ist f in x_0 differenzierbar, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Beweis: Sei x_0 lokales Minimum von f . Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(x) \geq f(x_0)$ für $x \in U_\delta(x_0)$, also gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \begin{cases} \geq 0 & \text{für } x \in (x_0, x_0 + \delta), \\ \leq 0 & \text{für } x \in (x_0 - \delta, x_0). \end{cases}$$

Mit $x \searrow x_0$ folgt $f'(x_0) \geq 0$, mit $x \nearrow x_0$ folgt $f'(x_0) \leq 0$, also

$$f'(x_0) = 0.$$

□

Die Funktion $f(x) = x^3$ erfüllt $f'(0) = 0$, aber in $x = 0$ liegt kein lokales Extremum vor. **Grund:** Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist notwendig für eine lokale Extremalstelle einer differenzierbaren Funktion, aber sie ist nicht hinreichend.

Satz 2.4 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b) . Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis: Wir zeigen die Behauptung zuerst im Fall $f(a) = f(b) = 0$ (**Satz von Rolle**). Wir brauchen dann ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$. Nach Satz 2.1 gibt es $\xi_1, \xi_2 \in [a, b]$ mit mit

$$f(\xi_1) = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{und} \quad f(\xi_2) = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

Ist $\xi_1 \in (a, b)$, so folgt $f'(\xi_1) = 0$ nach Satz 2.3 und wir können $\xi = \xi_1$ wählen. Analog, wenn $\xi_2 \in (a, b)$. Im verbleibenden Fall $\xi_1, \xi_2 \in \{a, b\}$ folgt $\inf f = \sup f = 0$ bzw. $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$, und damit auch $f'(x) = 0$ für alle x .

Seien nun $f(a), f(b)$ beliebig. Definiere $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch Abziehen der Sekante:

$$h(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right).$$

Es gilt $h(a) = h(b) = 0$. Also existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Folgerung 2.1 (Monotoniekriterium)

Sei f differenzierbar auf (a, b) , stetig auf $[a, b]$. Dann gelten:

$$f'(x) \geq 0 \text{ f\"ur alle } x \in (a, b) \Rightarrow f \text{ ist wachsend auf } [a, b]$$

$$f'(x) \leq 0 \text{ f\"ur alle } x \in (a, b) \Rightarrow f \text{ ist fallend auf } [a, b]$$

$$f'(x) = 0 \text{ f\"ur alle } x \in (a, b) \Rightarrow f \text{ ist konstant.}$$

Bei strikter Ungleichung folgt strenge Monotonie auf $[a, b]$.

Beweis: Sei $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in (x_1, x_2)$, so dass gilt:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \begin{cases} \geq 0 & \text{wenn } f'(\xi) \geq 0 \\ > 0 & \text{wenn } f'(\xi) > 0 \\ \leq 0 & \text{wenn } f'(\xi) \leq 0 \\ < 0 & \text{wenn } f'(\xi) < 0 \\ = 0 & \text{wenn } f'(\xi) = 0 \end{cases} .$$

Folgerung 2.2 (Schrankensatz)

Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b) , so gilt für $a \leq x_1 < x_2 \leq b$:

$$f'(x) \geq m \text{ für alle } x \in (a, b) \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq m$$

$$f'(x) \leq M \text{ für alle } x \in (a, b) \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq M.$$

Beweis: Wir zeigen die erste Aussage. Mit $g(x) = mx$ gilt $(f - g)' = f' - g' \geq m - m = 0$. Nach Folgerung 2.1 ist $f - g$ wachsend, ds heißt $f(x_2) - mx_2 \geq f(x_1) - mx_1$. Die Behauptung folgt. \square

Der Mittelwertsatz gilt nicht für vektorwertige Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Technisch liegt das daran, dass die Stelle ξ aus dem Satz für die einzelnen Koordinatenfunktionen im allgemeinen verschieden ist. Ein konkretes Gegenbeispiel ist $c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $c(t) = e^{it}$:

$$\frac{c(2\pi) - c(0)}{2\pi - 0} = 0, \quad \text{aber} \quad |c'(t)| = 1 \text{ für alle } t \in [0, 2\pi].$$

Dennoch können wir auch im vektorwertigen Fall eine Version des Schrankensatzes beweisen.

Folgerung 2.3 (f' beschränkt $\Rightarrow f$ Lipschitz)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Falls $|f'(x)| \leq L$ für alle $x \in (a, b)$, so folgt

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in [a, b].$$

Beweis: Um die Aussage auf den reellwertigen Fall zu reduzieren, betrachten wir für einen beliebigen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $|v| = 1$ die Funktion

$$\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \langle v, f(x) \rangle = \sum_{i=1}^n v_i f_i(x).$$

Aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz, siehe Satz 3.5 in Kapitel 1, folgt

$$\varphi'(x) = \langle v, f'(x) \rangle \leq |v| |f'(x)| \leq L.$$

Für $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 > x_2$ erhalten wir aus Folgerung 2.2

$$\langle v, f(x_1) - f(x_2) \rangle = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \leq L(x_1 - x_2) = L|x_1 - x_2|.$$

Wir können $f(x_1) \neq f(x_2)$ annehmen, denn sonst ist nichts zu zeigen. Nun wählen wir $v = (f(x_1) - f(x_2)) / |f(x_1) - f(x_2)|$, insbesondere $|v| = 1$, und erhalten

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \langle f(x_1) - f(x_2), v \rangle \leq L|x_1 - x_2|.$$



Wir kommen jetzt zu höheren Ableitungen.

Definition 2.3

Die k -te Ableitung von $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 ist induktiv definiert durch

$$f^{(k)}(x_0) = (f^{(k-1)})'(x_0).$$

Damit $f^{(k)}(x_0)$ definiert ist, müssen also die Ableitungen bis Ordnung $k - 1$ in einer Umgebung von x_0 definiert sein, und $f^{(k-1)}$ muss in x_0 differenzierbar sein.

Natürlich schreiben wir f' und f'' statt $f^{(1)}$ bzw. $f^{(2)}$.

Mit der zweiten Ableitung gewinnen wir genauere Informationen über lokale Extrema.

Satz 2.5

Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. In $x_0 \in (a, b)$ gelte $f'(x_0) = 0$, und $f''(x_0)$ sei definiert. Dann gilt:

- (1) Ist $f''(x_0) > 0$, so hat f in x_0 ein isoliertes, lokales Minimum.
- (2) Hat f in x_0 ein lokales Minimum, so folgt $f''(x_0) \geq 0$.

Analoge Aussagen gelten mit umgekehrten Ungleichungen für Maxima.

Beweis: Da $f'(x_0) = 0$ nach Voraussetzung, gilt

$$0 < f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}.$$

Unter der Voraussetzung (1) gibt es ein $\delta > 0$ mit $f'(x) < 0$ auf $(x_0 - \delta, x_0)$ und $f'(x) > 0$ auf $(x_0, x_0 + \delta)$. Nach Folgerung 2.1 ist f dann streng monoton fallend auf $(x_0 - \delta, x_0)$ und streng monoton wachsend auf $(x_0, x_0 + \delta)$, hat also in x_0 ein isoliertes, lokales Minimum. Wäre $f''(x_0) < 0$ in (2), so hätte f in x_0 ein isoliertes lokales Maximum im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Bemerkung. Die Funktion $f(x) = x^4$ zeigt, dass in einem isolierten Minimum $f''(x_0) = 0$ gelten kann.

Häufig ist man nicht wirklich an den lokalen Minima, sondern am globalen Minimum interessiert. Dafür ist der Begriff der Konvexität relevant.

Definition 2.4

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **konvex**, falls gilt:

$$f((1-t)x_0 + tx_1) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1) \quad \forall x_0, x_1 \in I, t \in [0, 1].$$

Gilt dies mit \geq statt mit \leq , so heißt f **konkav**.

Geometrische Interpretation: Die Sekante durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ hat die Geradengleichung

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) =: g(x).$$

An der Stelle $x(t) = (1 - t)x_0 + tx_1$ gilt

$$g(x(t)) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} t(x_1 - x_0) = (1 - t)f(x_0) + tf(x_1).$$

Die Konvexität bedeutet also, dass der Graph von f stets unterhalb der Sekanten liegt,

Satz 2.6 (Konvexitätskriterien)

Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) f' ist monoton wachsend auf (a, b) .
- (2) f ist konvex.
- (3) $f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$ für alle $x_0, x_1 \in (a, b)$.

Ist f zweimal differenzierbar auf (a, b) , so ist außerdem äquivalent:

- (4) $f'' \geq 0$.

Beweis: Wir zeigen $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.

Sei also (1) erfüllt. Wäre f nicht konvex, so gibt es $x_0, x_1 \in I$ mit der Eigenschaft, dass die stetige Funktion

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = f((1-t)x_0 + tx_1) - ((1-t)f(x_0) + tf(x_1))$$

für gewisse $t \in [0, 1]$ strikt positiv ist. Da $g(0) = g(1) = 0$, nimmt g ein strikt positives Maximum in $t_0 \in (a, b)$ an, siehe Satz 2.1, und es gilt $g'(t_0) = 0$ wegen Satz 2.3. Aber $g'(t)$ ist monoton wachsend, denn es gilt

$$g'(t) = f'(x_0 + t(x_1 - x_0))(x_1 - x_0) - (f(x_1) - f(x_0)).$$

Also ist $g'(t) \geq 0$ für $t \geq t_0$, und mit Folgerung 2.1 folgt $g(1) \geq g(t_0) > 0$, Widerspruch.

Sei jetzt f konvex, das heißt für $t \in (0, 1)$ und $x_0, x_1 \in (a, b)$ mit $x_0 \neq x_1$ gilt

$$(x_1 - x_0) \frac{f(x_0 + t(x_1 - x_0)) - f(x_0)}{t(x_1 - x_0)} \leq f(x_1) - f(x_0).$$

Mit $t \searrow 0$ folgt $(x_1 - x_0)f'(x_0) \leq f(x_1) - f(x_0)$, dies ist die behauptete Ungleichung (3).

Schließlich setzen wir (3) voraus. Indem wir dort x_0 und x_1 vertauschen und addieren, folgt

$$(f'(x_1) - f'(x_0))(x_1 - x_0) \geq 0,$$

womit (1) gezeigt ist.

Ist f zweimal differenzierbar, so impliziert $f'' \geq 0$ Bedingung (1) nach Folgerung 2.1, und umgekehrt folgt $f'' \geq 0$ aus (1) einfach durch Betrachtung des Differenzenquotienten. □

Beispiel 2.1 (Youngsche Ungleichung)

Für $x, y \geq 0$ gilt die Ungleichung

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \quad \text{falls } p, q \in (1, \infty) \text{ mit } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Dazu betrachten wir für festes $y > 0$ die Funktion

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = xy - \frac{x^p}{p}.$$

Es gilt $f'(x) = y - x^{p-1}$ und $f''(x) = -(p-1)x^{p-2} \leq 0$, das heißt f ist konkav nach Satz 2.6 (4). Aber $f'(x_0) = 0$ für $x_0 = y^{1/(p-1)}$, also folgt mit Satz 2.6 wegen $p/(p-1) = q$

$$\begin{aligned} xy - \frac{x^p}{p} &= f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ &= y^{1/(p-1)}y - \frac{y^{p/(p-1)}}{p} = \frac{y^q}{q}. \end{aligned}$$

Definition 2.5

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $k \in \mathbb{N}_0$. Wir bezeichnen mit $C^k(I)$ den \mathbb{R} -Vektorraum der k mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, das heißt

$$C^k(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : f^{(i)} : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ sind definiert und stetig für } i = 0, 1, \dots, k\}.$$

Weiter definieren wir $C^\infty(I)$ als den \mathbb{R} -Vektorraum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen, also ist

$$C^\infty(I) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(I).$$

Der Umgang mit C^∞ -Funktionen ist besonders angenehm, weil die Klasse im Gegensatz zu den Räumen $C^k(I)$ unter der Bildung von Ableitungen abgeschlossen ist.

Es ist klar, dass Polynome unendlich oft differenzierbar sind, ebenso die Exponentialfunktion sowie Cosinus und Sinus.

Diese Funktionen sind alle durch konvergente Potenzreihen dargestellt. Wir wollen nun eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ konstruieren, die für $x > 0$ strikt positiv und für $x \leq 0$ gleich Null ist. Eine solche Funktion kann in keiner Umgebung von $x = 0$ durch eine Potenzreihe dargestellt werden, denn ihre Nullstellenmenge hat in $x = 0$ einen Häufungspunkt; nach dem Identitätssatz für Potenzreihen, siehe Satz 4.11 in Kapitel 2, müsste f dann die Nullfunktion sein. Wir brauchen zur Konstruktion folgende Aussagen zum Verhalten von e^x für $x \rightarrow \pm\infty$.

Wachstum von exp und log

Es gelten folgende Aussagen:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-s} e^x = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^s e^{-x} = 0 \quad \text{für jedes } s > 0, \quad (2.2)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y^{-s} \log y = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{y \searrow 0} y^s \log y = 0 \quad \text{für jedes } s > 0. \quad (2.3)$$

Beweis: Wir wählen $n \in \mathbb{N}$ mit $n > s$ und erhalten für $x \geq 0$

$$x^{-s} e^x = x^{-s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq \frac{x^{n-s}}{n!} \rightarrow \infty \quad \text{mit } x \rightarrow \infty.$$

Die zweite Aussage in (2.2) ergibt sich durch Übergang zum Kehrwert. Mit der Substitution $x = -s \log y$ folgt weiter für $y \searrow 0$

$$0 = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} x = \lim_{y \searrow 0} y^s (-s \log y).$$

Setzen wir $y = 1/z$ mit $z \rightarrow \infty$, so folgt auch der linke Grenzwert in (2.3). □

Folgerung

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

ist unendlich oft differenzierbar.

Beweis: Wir zeigen durch Induktion, dass es Polynome p_n gibt mit

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

Für $n = 0$ ist das richtig mit $p_0(s) \equiv 1$. Ist die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gezeigt, so folgt:

$$f^{(n+1)}(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{x^2} p_n\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} p_n'\left(\frac{1}{x}\right)\right) e^{-1/x} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Für $x \neq 0$ gilt der Induktionsschluss also mit

$$p_{n+1}(s) = s^2 (p_n(s) - p_n'(s)).$$

Zu zeigen bleibt $f^{(n+1)}(0) = 0$. Für den linksseitigen Differenzenquotienten ist das klar, für $x > 0$ berechnen wir mit (2.2)

$$\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \frac{1}{x} p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x} \rightarrow 0 \quad \text{mit } x \searrow 0.$$