Analysis I

Guofang Wang

Universität Freiburg

17.1.2017

Satz 2.8 (Zweiter Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig,* f *und* g *differenzierbar auf* (a, b)*.*
Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ *mit*

$$g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a)).$$

Beweis: Setze

$$h(x) := (g(x) - g(a))(f(b) - f(a)) - (f(x) - f(a))(g(b) - g(a))$$

für $x \in [a, b]$ und wende den Satz von Rolle an. □

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \qquad \text{falls } g(b) \neq g(a), g'(\xi) \neq 0.$$

Als Anwendung haben wir die folgende, oft nützliche Regel.

Satz 2.9 (Regel von de l'Hospital)

Seien $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a, b]$ und $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$. Es gelte

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c.$$

Dann ist

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

BEWEIS: Wir setzen noch $f(a) = g(a) = 0$; dann sind f und g stetige Funktionen auf $[a, b]$. Sei $\epsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\left|\frac{f'(y)}{g'(y)} - c\right| < \epsilon \quad \text{für } y \in (a, a + \delta).$$

Sei jetzt $x \in (a, a + \delta)$. Nach Satz 2.8 existiert ein $\xi \in (a, x)$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Es folgt

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - c\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - c\right| < \epsilon.$$

Domit ist

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

gezeigt. $\square$

Nützlich ist oft auch die folgende Version der Regel von de l'Hospital, bei der Zähler und Nenner des fraglichen Quotienten nicht gegen 0 konvergieren, sondern bestimmt divergieren.

Satz 2.10

Seien $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ differenziebar. Es gelte

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

$$g(x) \neq 0, \quad g'(x) \neq 0 \quad \text{für } x \in (a, b],$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c.$$

Dann ist

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

Den Beweis finden Sie in dem Buch von Hildebrandt "Analysis 1", s. 347-352

Beispiel 2.2

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$. (Lemma 2.4 in Kapitel 3.)

Beispiel 2.3

$\lim_{x\to 0} x^s \log x = 0$ für $s > 0$. ((2.3) in Satz 2.7)

$$-x^s \log x = \frac{\log \frac{1}{x}}{x^{-s}} =: \frac{f(x)}{g(x)},$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x}, \quad g'(x) = -sx^{-s-1},$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{s}x^s, \quad \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0.$$

Damit folgt aus der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0.$$