Analysis I

Guofang Wang

Universität Freiburg

18.1.2017

Kapitel 5. Integralrechnung

1. Das Riemannsche Integral

Das Integral einer nichtnegativen Funktion $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ ist anschaulich der Flächeninhalt des Gebiets

$$\{(x, y) : x \in I,\, 0 < y < f(x)\}.$$

Allerdings haben wir den Flächeninhalt von Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ noch gar nicht definiert, außer vielleicht von einfachen Gebieten wie Rechtecken, so dass die gegebene Beschreibung nicht zur Definition taugen kann.

Dennoch lassen wir uns im Folgenden von dieser geometrischen Vorstellung leiten.

Definition 1.1 (Zerlegung)

Eine Zerlegung Z des Intervalls $I = [a, b]$ ist eine geordnete Menge von Punkten $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_N = b$.
Wir setzen $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ sowie $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ für $k = 1, \ldots, N$, und definieren die Feinheit von Z durch

$$\Delta(Z) = \max_{1 \leq k \leq N} \Delta x_k. \tag{1.1}$$

Definition 1.2 (Riemannsche Summe)

Sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$. Die Riemannsche Summe von f zur Zerlegung Z und den Stützstellen $\xi_k \in I_k$ ist

$$S_{Z,\xi}(f) = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\, \Delta x_k \in \mathbb{R}.$$

Die Riemannsche Summe sollte einen Näherungswert für das noch zu definierende Integral darstellen.

Eine konkrete Wahl der Zerlegung und der Stützstellen, zum Beispiel die äquidistante Zerlegung mit Intervallmittelpunkten als Stützstellen, führt auf ein numerisches Verfahren zur Approximation des Integrals.

Im allgemeinen ist aber nicht gefordert, dass die Zerlegung äquidistant ist, auch können die Stützstellen beliebig in den I_k gewählt werden.

Um zu einer sinnvollen Definition zu gelangen, sollte bei Verfeinerung der Zerlegung der Approximationsfehler kleiner werden. Dies führt auf folgenden Begriff der Integrierbarkeit.

Definition 1.3 (Riemann-Integral)

Eine beschränkte Funktion $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt (Riemann-)integrierbar mit Integral $S \in \mathbb{R}$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für jede Zerlegung Z und jede Wahl ξ der Stützstellen gilt:

$$\Delta(Z) < \delta \quad \Rightarrow \quad |S_{Z,\xi}(f) - S| < \varepsilon.$$

Wir nennen dann S das (bestimmte) Integral von f auf $[a, b]$ und schreiben

$$S = \int_a^b f \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 1.1

Die konstante Funktion $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, *ist integrierbar mit*

$$\int_a^b f = c\,(b-a).$$

Denn für jede Zerlegung Z *und jede Wahl der* $\xi_k \in I_k$ *gilt*

$$S_{Z,\xi}(f) = \sum_{k=1}^{N} c\,\Delta x_k = c\sum_{k=1}^{N}(x_k - x_{k-1}) = c\,(b-a).$$

Beispiel 1.2

Die Dirichletfunktion

$$\chi_{\mathbb{Q}} : [0,1] \to \mathbb{R},\ \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist nicht (Riemann-) integrierbar. In jedem I_k mit $\Delta x_k > 0$ gibt es rationale und irrationale Punkte. Für rationale Stützstellen ist $S_{Z,\xi}(\chi_{\mathbb{Q}}) = 1$, für irrationale dagegen $S_{Z,\xi}(\chi_{\mathbb{Q}}) = 0$.

Definition 1.4 (Supremumsnorm)

Für $f : I \to \mathbb{R}$ setzen wir

$$\|f\|_I = \sup\{|f(x)| : x \in I\}.$$

Die Menge der beschränkten Funktionen auf I, also $\|f\|_I < \infty$, bezeichnen wir mit $\mathcal{B}(I)$.

Die Supremumsnorm hat folgende Eigenschaften, analog zur Euklidischen Norm:

Positivität: $\|f\|_I \geq 0$ mit Gleichheit genau wenn $f = 0$,

Halblinearität: $\|\lambda f\|_I = |\lambda| \, \|f\|_I$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dreiecksungleichung: $\|f + g\|_I \leq \|f\|_I + \|g\|_I$.

Satz 1.1 (Linearität des Integrals)

Die Menge $\mathcal{R}(I)$ der Riemann-integrierbaren Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ ist ein Untervektorraum von $\mathcal{B}(I)$ und das Integral $\mathcal{R}(I) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_a^b f$, ist ein lineares Funktional. Es gilt also für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b (\lambda\, f + \mu\, g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Beweis: Es gilt $S_{Z,\xi}(\lambda f + \mu g) = \lambda S_{Z,\xi}(f) + \mu S_{Z,\xi}(g)$, also folgt für $\Delta(Z)$ hinreichend klein

$$\begin{aligned} &\left| S_{Z,\xi}(\lambda f + \mu g) - \left(\lambda \textstyle\int_a^b f + \mu \int_a^b g \right) \right| \\ \le\ & |\lambda| \left| S_{Z,\xi}(f) - \textstyle\int_a^b f \right| + |\mu| \left| S_{Z,\xi}(g) - \textstyle\int_a^b g \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

$\square$

Um zu zeigen, dass stetige Funktionen integrierbar sind, gehen wir in drei Schritten vor:

a) Stückweise konstante Funktionen (Treppenfunktionen) sind integrierbar.
b) Läßt sich eine Funktion gut durch integrierbare Funktionen approximieren, so ist sie integrierbar.
c) Stetige Funktionen lassen sich gut durch Treppenfunktionen approximieren, und sind damit integrierbar.

Natürlich ist unter anderem noch zu klären, was die gute Approximation eigentlich sein soll. Wir beginnen unser Programm, indem wir zunächst zwei Eigenschaften des Integrals zeigen.

Lemma 1.1

Seien $f, \tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in I \backslash \{p_1, \ldots, p_r\}$. Mit $f \in \mathcal{R}(I)$ ist dann auch $\tilde{f} \in \mathcal{R}(I)$ und es gilt $\int_a^b \tilde{f} = \int_a^b f$.

Beweis: Wir zeigen die Aussage im Fall eines Ausnahmepunkts $p \in I$; der allgemeine Fall folgt daraus per Induktion. Es gilt für jede Zerlegung Z mit Stützstellen ξ_k

$$S_{Z,\xi}(\tilde{f}) - S_{Z,\xi}(f) = \sum_{k=1}^{N} (\tilde{f}(\xi_k) - f(\xi_k))\,\Delta x_k = \sum_{\{k:\xi_k = p\}} (\tilde{f}(p) - f(p))\,\Delta x_k.$$

Es ist $\xi_k = p$ höchstens für zwei k mit $\Delta x_k > 0$. Damit schätzen wir ab

$$\begin{aligned} \left| S_{Z,\xi}(\tilde{f}) - \int_a^b f \right| &\leq \left| S_{Z,\xi}(\tilde{f}) - S_{Z,\xi}(f) \right| + \left| S_{Z,\xi}(f) - \int_a^b f \right| \\ &\leq 2 \left| \tilde{f}(p) - f(p) \right| \Delta(Z) + \left| S_{Z,\xi}(f) - \int_a^b f \right|, \end{aligned}$$

und die rechte Seite geht gegen Null mit $\Delta(Z) \to 0$. $\square$

Bemerkung. Wie Beispiel 1.2 zeigt, ist Lemma 1.1 nicht richtig für eine abzählbare Ausnahmemenge.

Lemma 1.2

Sei $I = I_1 \cup \ldots \cup I_n$ eine Zerlegung von $I = [a, b]$ in Intervalle $I_k = [a_{k-1}, a_k]$. Ist $f : I \to \mathbb{R}$ auf jedem der Teilintervalle I_k integrierbar, so folgt $f \in \mathcal{R}(I)$ und

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^n \int_{a_{k-1}}^{a_k} f.$$

Beweis: Es reicht den Fall $n = 2$ zu betrachten. Sei $I = I' \cup I''$ mit $I' = [a, p]$ und $I'' = [p, b]$, und sei $f : I \to \mathbb{R}$ integrierbar auf I' und I'', insbesondere $\|f\|_I = \max(\|f\|_{I'}, \|f\|_{I''}) < \infty$. Ist Z eine Zerlegung von I mit Punkten $a = x_0 \leq \ldots \leq x_N = b$ sowie Stützstellen $\xi_1, \ldots, \xi_N$, so gilt $x_{r-1} \leq p < x_r$ für ein $r \in \{1, \ldots, N\}$, und wir definieren Zerlegungen Z',Z'' von I', I'' mit Stützstellen ξ', ξ'' wie folgt:

$$\begin{aligned} Z' &= \{a = x_0 \leq \ldots \leq x_{r-1} \leq p\} \quad \xi' = \{\xi_1, \ldots, \xi_{r-1}, p\}, \\ Z'' &= \{p < x_r \leq \ldots \leq x_N = b\} \quad \xi'' = \{p, \xi_{r+1}, \ldots, \xi_N\}. \end{aligned}$$

Offenbar gilt $\Delta(Z'), \Delta(Z'') \leq \Delta(Z)$. Die Bilanz der Riemannschen Summen lautet

$$|S_{Z,\xi}(f) - \big(S_{Z',\xi'}(f) + S_{Z'',\xi''}(f)\big)| = |(f(\xi_r) - f(p))\,\Delta x_r| \leq 2\,\|f\|_I\,\Delta(Z).$$

Es folgt mit der Dreiecksungleichung

$$\Big|S_{Z,\xi}(f) - \Big(\int_a^p f + \int_p^b f\Big)\Big| \leq 2\,\|f\|_I\,\Delta(Z) + \Big|S_{Z',\xi'}(f) - \int_a^p f\Big| + \Big|S_{Z'',\xi''}(f) - \int_p^b f\Big|.$$

Die rechte Seite geht mit $\Delta(Z) \to 0$ gegen Null. $\square$

Folgereun 1.1

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion, d. h. es gibt eine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ und $c_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ mit $f(x) = c_i$ für alle $x \in (a_{i-1}, a_i)$. Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) c_i.$$

Beweis: Nach Lemma 1.1 ist $f : [a_{i-1}, a_i] \to \mathbb{R}$ integrierbar für alle $i = 1, \ldots, n$. Aus Lemma 1.2 folgt die Behauptung. $\square$

Damit ist der erste Schritt unseres Programms erledigt.

Der zweite Schritt besteht darin, für einen geeigneten Begriff von Konvergenz $f_k \to f$ folgende Aussage zu zeigen:

$$f_k \to f \text{ mit } f_k \text{ integrierbar} \Rightarrow f \text{ integrierbar und } \int_a^b f = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k.$$

Welcher Konvergenzbegriff ist dabei zu wählen?

Zweifellos ist es naheliegend, es mit der punktweisen Konvergenz zu probieren:

$$f_k \to f \text{ punktweise} \quad \Leftrightarrow \quad f_k(x) \to f(x) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Aber wie die folgenden Beispiele zeigen, ist die punktweise Konvergenz zu schwach.

Beispiel 1.3

Sei $q_1, q_2, \ldots$ *eine Abzählung der rationalen Zahlen in* $[0,1]$*. Definiere*

$$\chi_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ \chi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \{q_1, \ldots, q_n\} \\ 0 & \text{sonst}\ . \end{cases}$$

Die Folge χ_n *konvergiert punktweise gegen die Funktion* $\chi_{\mathbb{Q}}$*, die nach Beispiel 1.2 nicht integrierbar ist.*

Beispiel 1.4

Betrachte die Treppenfunktionen

$$f_k : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_k(x) = \begin{cases} k & \textit{für } 0 < x < \frac{1}{k} \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$ *für alle* $x \in [0,1]$*, denn*

$$f_k(x) = 0 \quad \begin{cases} \textit{für alle } k, & \textit{falls } x = 0 \\ \textit{für } k \geq \frac{1}{x}, & \textit{falls } x > 0. \end{cases}$$

Also konvergiert f_k *punktweise gegen* $f \equiv 0$*. Aber es ist*

$$0 = \int_0^1 f \neq \lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \cdot k = 1.$$

Satz 1.2

Für $f \in \mathcal{R}(I)$ gilt die Ungleichung

$$\left| \int_a^b f \right| \leq |b-a| \, \|f\|_I .$$

Beweis: Für jede Zerlegung Z mit Stützstellen ξ_k gilt mit der Dreiecksungleichung

$$|S_{Z,\xi}(f)| \leq \sum_{k=1}^N |f(\xi_k)| \, \Delta x_k \leq \|f\|_I \sum_{k=1}^N \Delta x_k = |b-a| \, \|f\|_I . \quad (1.2)$$

Die Abschätzung für das Integral folgt. $\square$

Für $f, f_k \in \mathcal{R}(I)$ haben wir nun

$$\left| \int_a^b f_k - \int_a^b f \right| = \left| \int_a^b (f_k - f) \right| \leq |b-a| \, \|f_k - f\|_I ,$$

so dass aus $\|f_k - f\|_I \to 0$ auch die Konvergenz der Integrale folgt. Dies motiviert den folgenden Konvergenzbegriff.

Definition 1.5 (Gleichmäßige Konvergenz)

Die Folge von Funktionen $f_k : I \to \mathbb{R}$ konvergiert gleichmäßig $f : I \to \mathbb{R}$, falls gilt:

$$\|f_k - f\|_I \to 0 \quad \text{mit } k \to \infty.$$

In Quantorensprache sieht punktweise bzw. gleichmäßige Konvergenz wie folgt aus:

Punktweise Konvergenz und gleichmäßige Konvergenz:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in D \quad \exists N \quad \forall k > N : \quad |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall x \in D \quad \forall k > N : \quad |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Der Unterschied ist, dass bei punktweiser Konvergenz die Schranke N von $x \in I$ abhängen darf, also $N = N(\varepsilon, x)$, während bei gleichmäßiger Konvergenz die Schranke N für alle x gleich gewählt werden kann.

Im Beispiel 1.4 gilt etwa, falls $\varepsilon \leq 1$ und $x > 0$,

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad k \geq \frac{1}{x},$$

so dass $N(\varepsilon, x) \geq 1/x$ sein muss, also nicht unabhängig von x gewählt werden kann.

Klar ist, dass gleichmäßige Konvergenz punktweise Konvergenz impliziert.

Deshalb kann man in zwei Schritten vorgehen, um eine Funktionenfolge f_k auf gleichmäßige Konvergenz zu prüfen:

(1) Konvergiert die Folge punktweise? Wenn nicht, so erst recht nicht gleichmäßig. Wenn ja, so ist die punktweise Grenzfunktion die einzig mögliche Kandidatin für den gleichmäßigen Grenzwert.

(2) Nun bestimme $\|f_k - f\|_I$ bzw. schätze diese Norm ab. Gilt $\|f_k - f\|_I \to 0$ mit $k \to \infty$, so ist f_k gleichmäßig konvergent gegen f. Wenn nicht, so ist f_k zwar punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergent.

Im Beispiel 1.4 gilt $f_k \to f$ mit $f = 0$ punktweise auf $[0, 1]$, aber nicht gleichmäßig, denn

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_k(x) - f(x)| = k \to \infty \quad \text{mit } k \to \infty.$$

Satz 1.3 (Integral und gleichmäßige Konvergenz)

Konvergiert die Folge $f_k \in \mathcal{R}(I)$ gleichmäßig gegen $f : I \to \mathbb{R}$, also $\|f_k - f\|_I \to 0$, so ist $f \in \mathcal{R}(I)$ und es gilt

$$\int_a^b f = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k.$$

Beweis: 1. Die Funktion f ist beschränkt wegen $\|f\|_I \leq \|f - f_k\|_I + \|f_k\|_I < \infty$.

2. Mit $S_k = \int_a^b f_k$ gilt für k, l hinreichend groß nach Satz 1.2

$$|S_k - S_l| \leq |b-a| \, \|f_k - f_l\|_I \leq |b-a| \left(\|f_k - f\|_I + \|f - f_l\|_I\right) < \varepsilon.$$

Also ist $\{S_k\}$ eine Cauchyfolge. Wir setzen $S = \lim_{k\to\infty} S_k$ und zeigen, dass f integrierbar ist mit $\int_a^b f = S$.

Für jede Zerlegung Z mit Stützstellen ξ_j und jedes $k \in \mathbb{N}$ haben wir mit (1.2)

$$\begin{aligned} |S_{Z,\xi}(f) - S| &\leq |S_{Z,\xi}(f) - S_{Z,\xi}(f_k)| + |S_{Z,\xi}(f_k) - S_k| + |S_k - S| \\ &\leq (b-a)\,\|f - f_k\|_I + |S_{Z,\xi}(f_k) - S_k| + |S_k - S|. \end{aligned}$$

Zu gegbenem $\varepsilon > 0$ wählen wir erst $k \in \mathbb{N}$ mit $(b-a)\,\|f - f_k\|_I < \varepsilon/3$ und $|S_k - S| < \varepsilon/3$. Für $\Delta(Z) < \delta$ ist dann auch $|S_{Z,\xi}(f_k) - S_k| < \varepsilon/3$, da f_k integrierbar ist. Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Damit ist auch der zweite Schritt unseres Programms abgeschlossen. Es bleibt jetzt nachzuweisen, dass stetige Funktionen $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximiert werden können.

Satz 1.4

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ folgenkompakt und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig, das heißt zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$x, x' \in D, \quad |x - x'| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon. \tag{1.3}$$

Beweis. Andernfalls gibt es für ein $\varepsilon > 0$ Punkte $x_n, x'_n \in D$, so dass gilt:

$$|x_n - x'_n| \to 0, \text{ aber } |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon.$$

Da D kompakt, konvergiert die Folge x_n nach Übergang zu einer Teilfolge gegen ein $x_0 \in D$. Offenbar gilt dann auch $\lim_{n\to\infty} x'_n = x_0$. Da f stetig, ergibt sich der Widerspruch

$$\varepsilon \leq \lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x'_n)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0.$$

Beispiel 1.5

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ *stetig, aber* D *nicht kompakt, so muss* f *nicht gleichmäßig stetig sein.*

Betrachte zum Beispiel $f : (0, \frac{1}{\pi}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. *Mit* $x_n = (n\pi)^{-1}$, $x_n' = (n\pi + \pi/2)^{-1}$ *gilt* $x_n, x_n' \to 0$, *aber* $|f(x_n) - f(x_n')| = 1$ *für alle* n.

Satz 1.5

Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall. Dann ist jede stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.

Beweis: Wir konstruieren zu $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit $\|\varphi - f\|_I \leq \varepsilon$. Die Behauptung ergibt sich dann aus Folgerung 1.1 und Satz 1.3.
Nach Satz 1.4 gibt es ein $\delta > 0$, so dass gilt:

$$x, x' \in I, \quad |x - x'| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Wähle eine beliebige Zerlegung Z mit Feinheit $\Delta(Z) < \delta$ und den Unterteilungspunkten $a = x_0 \leq \ldots \leq x_N = b$, und setze

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x_k) & \text{für } x \in (x_{k-1}, x_k] \text{ mit } k \in \{1, \ldots, N\}, \\ f(x_0) & \text{für } x = x_0. \end{cases}$$

Ist $x \in (x_{k-1}, x_k]$, so gilt $|x - x_k| < \delta$ und somit $|\varphi(x) - f(x)| = |f(x_k) - f(x)| < \varepsilon$ nach Wahl von δ. Da $\varphi(x_0) = f(x_0)$, folgt insgesamt $\|\varphi - f\|_I \leq \varepsilon$. $\square$

Es ist nützlich, die Integrierbarkeit auch für stückweise stetige Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zu haben, das heißt es gibt eine Zerlegung $a = a_0 < \ldots < a_N = b$, so dass f auf jedem Teilintervall $[a_{k-1}, a_k]$ nach eventueller Abänderung in den Endpunkten a_{k-1} und a_k stetig ist. Diese Verallgemeinerung folgt natürlich sofort aus Satz 1.5 und Lemma 1.2.

Während die bisherige Darstellung des Riemannintegrals ohne Änderungen im vektorwertigen Fall zutrifft, spielt bei den folgenden Aussagen die Anordnung von $\mathbb{R}$ eine Rolle.

Satz 1.6 (Monotonie des Integrals)

Sind $f, g \in \mathcal{R}(I)$, so gilt:

$$f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Insbesondere gilt $\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$, falls f, $|f| \in \mathcal{R}(I)$.

Beweis: Für jede Zerlegung Z mit Stützstellen ξ_k gilt

$$S_{Z,\xi}(f) = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{N} g(\xi_k)\Delta x_k = S_{Z,\xi}(g).$$

$\square$

Folgerung 1.2 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Seien $f, \varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi \geq 0$. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f\varphi = f(\xi) \int_a^b \varphi.$$

Im Spezialfall $\varphi = 1$ folgt $\int_a^b f = f(\xi)(b - a)$.

Beweis: Wir können annehmen, dass $\int_a^b \varphi = 1$. Setze $m = \inf_{x\in I} f(x)$ und $M = \sup_{x\in I} f(x)$. Dann gilt $m\varphi \leq f\varphi \leq M\varphi$, also

$$m = \int_a^b m\varphi \leq \int_a^b f\varphi \leq \int_a^b M\varphi = M.$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \int_a^b f\varphi$. $\square$