Analysis I

Guofang Wang

Universität Freiburg

31.1.2017

Definition 2.2 (uneigentliches Riemann-Integral)

Sei $I = [a, b)$ mit $a < b \le \infty$. Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei Riemann-integrierbar auf $[a, b']$ für alle $b' < b$. Falls

$$\lim_{x \nearrow b} \int_a^x f(\xi)\, d\xi$$

existiert, so heißt das Integral $\int_a^b f(\xi)\, d\xi$ konvergent (oder existent) und wir setzen

$$\int_a^b f(\xi)\, d\xi = \lim_{x \nearrow b} \int_a^x f(\xi)\, d\xi.$$

Lemma 2.1

In der Situation von Definition 2.2 ist $\int_a^b f$ genau dann konvergent, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $b' < b$ gibt mit

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f \right| < \varepsilon \quad \text{für alle } x_1, x_2 > b'.$$

Hier sind einige Beispiele von uneigentlichen Riemann-Integralen.

Beispiel 2.8

$$\int_1^\infty x^\alpha\,dx = \begin{cases} \lim_{R\nearrow\infty}\left[\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_{x=1}^{x=R} = -\dfrac{1}{\alpha+1} & \textit{für } \alpha < -1, \\ \textit{divergent} & \textit{für } \alpha \geq -1. \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^\alpha\,dx = \begin{cases} \textit{divergent} & \textit{für } \alpha \leq -1, \\ \lim_{\varepsilon\searrow 0}\left[\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_{x=\varepsilon}^{x=1} = \dfrac{1}{\alpha+1} & \textit{für } \alpha > -1. \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\nearrow 1}\int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \lim_{x\nearrow 1}\arcsin x = \pi/2.$$

In den vorangegangenen Beispielen sind die Integranden positiv.

Das uneigentliche Integral $\int_a^b f$ heißt absolut konvergent, wenn $\int_a^b |f|$ konvergiert.

Aus Lemma 2.1 folgt sofort, dass ein absolut konvergentes Integral konvergiert.

Wie bei Reihen impliziert die Konvergenz aber nicht umgekehrt die absolute Konvergenz. Ein simples Beispiel ist das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)\,dx$, wobei

$$f(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{k} \text{ für } k = [x].$$

Hierbei ist $[x]$ (oder $\lfloor x \rfloor$) die die Gaußkammer (oder Abrundung) von x:

$$[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}.$$

Für die Existenz des uneigentlichen Integrals auf einem beidseitig offenen Intervall (a, b) wählt man einen Zwischenpunkt $c \in (a, b)$ und verlangt die Existenz der Integrale auf $(a, c]$ und $[c, b)$. Das Integral über (a, b) ergibt sich dann als Summe.

Es ist leicht zu sehen, dass diese Definition nicht von der Wahl des Zwischenpunkts c abhängt.

Ein Beispiel ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \pi.$$

3. Vertauschungssätze für konvergente Folgen von Funktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir Folgen $f_n : I \to \mathbb{R}$ von Funktionen, die punktweise gegen eine Grenzfunktion $f : I \to \mathbb{R}$ konvergieren, das heißt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Wir interessieren uns dafür, unter welchen Voraussetzungen sich die Stetigkeit bzw. Differenzierbarkeit der Funktionen f_n auf die Grenzfunktion f überträgt.

Ein wichtiger Fall ist die Frage, ob eine reelle Potenzreihe $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ innerhalb des Konvergenzintervalls $(-R, R)$ eine differenzierbare Funktion darstellt.

Hier ist klar, dass die approximierenden Polynome $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ differenzierbar sind mit Ableitung $P_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k$. Wir werden zeigen, dass $P(x)$ auf $(-R, R)$ differenzierbar ist und dass gilt

$$P'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k.$$

Dies bedeutet, dass die Potenzreihe gliedweise differenziert werden kann, das heißt die Ableitung kann mit dem Grenzwert $n \to \infty$ der Reihe vertauscht werden.

Bei der Exponentialfunktion konnten wir die Frage der Stetigkeit und Differenzierbarkeit in $x \in \mathbb{R}$ mithilfe der Funktionalgleichung auf den Fall $x = 0$ reduzieren, wo wir dann die Abschätzung aus Satz 4.7 im Kapitel 1 zur Verfügung hatten.

Für eine allgemeine Potenzreihe haben wir kein Äquivalent der Funktionalgleichung und brauchen deshalb allgemeinere Resultate.

Die punktweise Konvergenz ist im allgemeinen nicht einmal ausreichend für die Stetigkeit der Grenzfunktion – hier zwei typische Beispiele.

Beispiel 3.1

Die Folge $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, *konvergiert mit* $n \to \infty$ *punktweise gegen die Funktion*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

Die Folge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \arctan(nx)$, *konvergiert punktweise gegen*

$$f(x) = \begin{cases} \pi/2 & \text{für } x > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Satz 3.1 (Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit)

Seien $f_n : D \to \mathbb{R}^p$, $n \in \mathbb{N}$, stetige Funktionen auf $D \subset \mathbb{R}^m$, die gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{R}^p$ konvergieren, das heißt

$$\|f_n - f\|_D = \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad \textit{mit } n \to \infty.$$

Dann ist f ebenfalls stetig auf D.

Beweis: Sei $x_0 \in D$ gegeben. Für beliebige $x \in D$, $n \in \mathbb{N}$ gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq 2\|f - f_n\|_D + |f_n(x) - f_n(x_0)|. \end{aligned}$$

Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir erst $n \in \mathbb{N}$ mit $\|f - f_n\|_D < \varepsilon/3$, dann $\delta > 0$ mit $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3$ für $|x - x_0| < \delta$. Es folgt

$$|f(x) - f(x_0)| < 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon, \text{ für } |x - x_0| < \delta.$$

$\square$

Folgerung 3.1

Sei $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ und n-ten Partialsummen $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$. Dann konvergiert P_n gleichmäßig gegen P auf jeder Kreisscheibe $B_\varrho(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \varrho\}$ mit $\varrho < R$, und P ist stetig auf $B_R(0)$.

Beweis: Wähle $r \in (\varrho, R)$. Nach der Definition des Konvergenzradius in Satz 4.10 im Kapitel 1 konvergiert $P(z)$ für $z = r$, also ist $a_k r^k$ eine Nullfolge und es gibt ein $M \in [0, \infty)$ mit $|a_k| r^k \leq M$. In dieser Situation liefert Lemma 4.2 in Kapitel 1 die Abschätzung

$$\|P - P_n\|_{B_\varrho(0)} = \sup_{|z|<\varrho} |P(z) - P_n(z)| \leq \frac{M}{1 - \frac{\varrho}{r}} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{n+1} \to 0 \quad \text{mit } n \to \infty.$$

Dies beweist die gleichmäßige Konvergenz auf $B_\varrho(0)$. Nach Satz 3.1 ist P somit stetig auf $B_\varrho(0)$ für alle $\varrho < R$, also auf ganz $B_R(0)$. $\square$

Wir kommen zur Frage der Differenzierbarkeit der Grenzfunktion.

Satz 3.2 (Vertauschung von Konvergenz und Ableitung)

Sei $f_n \in C^1(I)$ eine Folge von Funktionen auf $I = (a, b)$, die punktweise gegen $f : I \to \mathbb{R}$ konvergiert. Falls die Folge f_n' gleichmäßig gegen $g : I \to \mathbb{R}$ konvergiert, so ist $f \in C^1(I)$ und $f' = g$.

Beweis: Für $x_0 \in I$ gilt nach Satz 2.2, dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung,

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(\xi)\, d\xi \quad \text{für alle } x \in I.$$

Da f_n' gleichmäßig gegen g konvergiert, folgt nach Satz 1.3 mit $n \to \infty$

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(\xi)\, d\xi \quad \text{für alle } x \in I.$$

Die Funktion g ist stetig nach Satz 3.1, also folgt aus dem Hauptsatz $f \in C^1(I)$ und $f' = g$. $\square$

Bemerkung: Für Funktionen $f : I \to \mathbb{R}^p$ oder $f : I \to \mathbb{C}$ gilt der Satz entsprechend. Dies ergibt sich sofort durch Anwendung auf die einzelnen Koordinatenfunktionen, vgl. Lemma 1.1 in Kapitel 4.

Um den Satz auf Potenzreihen anzuwenden, brauchen wir folgende Hilfsaussage.

Lemma 3.1

Sei $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine komplexe Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in [0, \infty]$. Dann hat die formal differenzierte Reihe

$$Q(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} z^k$$

denselben Konvergenzradius R.

Beweis: Es gilt $|a_k z^k| \le |k a_k z^{k-1}| \cdot |z|$ für $k \ge 1$, also hat $Q(z)$ höchstens den Konvergenzradius R. Zu $r \in (0, R)$ gibt es ein $M \in [0, \infty)$ mit $|a_k| r^k \le M$, da $P(r)$ konvergiert. Es folgt für alle $z \in B_r(0)$

$$|k a_k z^{k-1}| = k |a_k| r^k \frac{|z|^{k-1}}{r^k} \le \frac{kM|z|^{k-1}}{r^k}.$$

Die rechte Reihe konvergiert aber nach dem Quotientenkriterium, denn

$$\frac{(k+1)M|z|^k}{r^{k+1}} \left(\frac{kM|z|^{k-1}}{r^k} \right)^{-1} = \frac{(k+1)|z|}{kr} \to \frac{|z|}{r} < 1 \quad \text{mit } k \to \infty.$$

Also ist $Q(z)$ für $z \in B_R(0)$ absolut konvergent. $\square$

Satz 3.3 (Differenzierbarkeit von Potenzreihen)

Die Potenzreihe $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ habe den Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist die Funktion

$$P : (-R, R) \to \mathbb{C},\ P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

differenzierbar, und ihre Ableitung ergibt sich durch gliedweise Differentiation:

$$\begin{aligned} P'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k \quad \forall x \in (-R, R). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Beweis: Die Funktionen $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ konvergieren auf $(-R, R)$ punktweise gegen $P(x)$, und nach Lemma 3.1 und Folgerung 3.1 konvergieren die P_n' lokal gleichmäßig, das heißt gleichmäßig auf jedem Teilintervall $(-\varrho, \varrho) \subset (-R, R)$ mit $0 < \varrho < R$, gegen die stetige Funktion $Q : (-R, R) \to \mathbb{R}$, $Q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$. Die Behauptung folgt nun aus Satz 3.2 $\square$

Jetzt stehen alle Hilfsmittel zur Verfügung, um einige interessante Potenzreihenentwicklungen herzuleiten.

Beispiel 3.2

Für $x \in (-1,1) \subset \mathbb{R}$ *gilt die Reihendarstellung*

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \dots .$$

Denn die Reihe $P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ *konvergiert für* $x \in (-1,1)$ *nach dem Quotientenkriterium, also folgt aus Satz 3.3 und der Formel für die geometrische Reihe*

$$P'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x} \quad \text{für } x \in (-1,1).$$

Wegen $P(0) = 0 = \log 1$ *ergibt sich* $P(x) = \log(1+x)$.

Beispiel 3.3

Ähnlich zeigen wir für $x \in (-1,1) \subset \mathbb{R}$ *die Reihenentwicklung*

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \ldots .$$

Denn $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$ *konvergiert für* $x \in (-1,1)$ *nach dem Quotientenkriterium, und Satz 3.3 liefert*

$$P'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{für } x \in (-1,1).$$

Wegen $P(0) = 0 = \arctan 0$ *ergibt sich* $P(x) = \arctan x$.

Beipiel 3.4

Die Binomialreihe mit Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$B_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k.$$

Die Reihe hat Konvergenzradius $R = 1$, siehe Beispiel 4.6 in Kapitel 2. Für $x \in (-1, 1)$ berechnen wir mit Satz 3.3

$$\begin{aligned} B'_\alpha(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \binom{\alpha}{k+1} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{\alpha - k}{k+1} \binom{\alpha}{k} x^k = \alpha B_\alpha(x) - x B'_\alpha(x), \end{aligned}$$

das heißt $B'_\alpha(x) = \dfrac{\alpha}{1+x} B_\alpha(x)$.

Es folgt mit $f(x) = (1+x)^{-\alpha}$

$$
\begin{aligned}
(fB_\alpha)'(x) &= f'(x)B_\alpha(x) + f(x)B'_\alpha(x) \\
&= f(x)B_\alpha(x)\Big(-\frac{\alpha}{1+x} + \frac{\alpha}{1+x}\Big) = 0.
\end{aligned}
$$

Wegen $B_\alpha(0) = 1 = f(0)$ ergibt sich die folgende Darstellung (Newton 1665)

$$
(1+x)^\alpha = B_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \text{für alle } x \in (-1,1).
$$

In der Physik wird oft die Näherung $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x$ benutzt, für $|x| << 1$.

3.4 (Abelscher Grenzwertsatz)

Ist die Potenzreihe $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für $x = 1$ konvergent, so gilt

$$\lim_{x \nearrow 1} P(x) = P(1).$$

Beweis: Nach Voraussetzung hat P Konvergenzradius $R \geq 1$. Wir berechnen mit $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ für $0 \leq x < 1$

$$\begin{aligned}
P_n(1) - P_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k (1 - x^k) \\
&= (1-x) \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k-1} x^j \\
&= (1-x) \sum_{j=0}^{n-1} x^j \sum_{k=j+1}^{n} a_k \\
&= (1-x) \sum_{j=0}^{n-1} x^j \big(P_n(1) - P_j(1)\big).
\end{aligned}$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|P_n(1) - P_j(1)| < \varepsilon/2$ für $j, n > N$, also gilt

$$(1-x) \sum_{j=N+1}^{n-1} x^j \, |P_n(1) - P_j(1)| \leq (1-x) \, \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=N+1}^{\infty} x^j \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es folgt

$$|P_n(1) - P_n(x)| \leq (1-x) \sum_{j=0}^{N} |P_n(1) - P_j(1)| + \frac{\varepsilon}{2},$$

und schließlich mit $n \to \infty$

$$|P(1) - P(x)| \leq (1-x) \sum_{j=0}^{N} |P(1) - P_j(1)| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

für x hinreichend nahe bei Eins. $\square$

Beispiel 3.5

Nach dem Leibnizkriterium konvergiert die Reihe $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \pm \dots$ *auch für* $x = 1$, *also folgt aus Satz 3.4 (Mercator 1668)*

$$\log 2 = \lim_{x \nearrow 1} \log(1+x) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \dots .$$

Ebenso konvergiert die Reihe des $\arctan$ *auch für* $x = 1$, *und es ergibt sich die Darstellung (Gregory 1671, Leibniz 1674)*

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \lim_{x \nearrow 1} \arctan x = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \dots .$$