Kapitel 8

Kurvenintegrale und komplexe Analysis

1 Kurvenintegrale

Wir kehren hier zur eindimensionalen Analysis zurück und interessieren uns zunächst für Kurven im $\mathbb{R}^n$. Man bezeichnet jede stetige Abbildung eines Intervalls in den $\mathbb{R}^n$ als Kurve. Dies hört sich zunächst vernünftig an, allerdings lässt die Forderung der Stetigkeit noch Abbildungen zu, die anschaulich weit entfernt davon sind, eine Kurve zu sein. So hat G. Peano 1905 stetige Kurven konstruiert, die das Intervall $[0,1]$ surjektiv auf die Fläche eines Dreiecks abbilden. Wir sollten also lieber etwas mehr verlangen als nur Stetigkeit.

Definition 1.1 (C^1-Kurve) *Ist $\gamma \in C^1(I,\mathbb{R}^n)$, I Intervall, so heißt γ C^1-Kurve im $\mathbb{R}^n$.*

Beispiel 1.1 Für $p, v \in \mathbb{R}^n$ mit $v \neq 0$ ist $\gamma(t) = p + tv$ eine parametrisierte Gerade. Der Fall $v = 0$ ist jedoch durch Definition 1.1 nicht ausgeschlossen. Die Kurve

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = (r\cos t, r\sin t) \quad \text{mit } r > 0,$$

durchläuft den Kreis vom Radius r um den Nullpunkt unendlich oft. Durch Hinzufügen einer dritten Komponente entsteht die Schraubenlinie

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ \gamma(t) = (r\cos t, r\sin t, at) \quad \text{für } a > 0.$$

Bei einem Umlauf wächst die dritte Komponente um die Höhe $2\pi a$. Das Bild der Kurve

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = (\cos t, \sin 2t)$$

sieht aus wie eine etwas deformierte Acht.

Definition 1.2 (Bogenlänge) *Die Bogenlänge einer Kurve $\gamma \in C^1(I,\mathbb{R}^n)$, $I = [a,b]$, ist*

$$L(\gamma) = \int_I |\gamma'|.$$

Eigentlich müsste diese Formel durch Approximation von γ mit Polygonzügen, deren Länge elementar definiert ist, begründet werden. Für eine Zerlegung $a = t_0 < \ldots < t_N = b$ sollte näherungsweise gelten:

$$\sum_{i=1}^{N} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{N} \Big| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t)\, dt \Big| \approx \sum_{i=1}^{N} |\gamma'(t_i)| \Delta t_i \approx \int_I |\gamma'(t)|\, dt.$$

Wir verzichten aber hier darauf, dieses Argument rigoros zu machen.

Beispiel 1.2 Die Länge von $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t, at)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, ist

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |(-r\sin t, r\cos t, a)|\, dt = 2\pi\sqrt{r^2 + a^2}.$$

Die Schraubenlinie verläuft auf dem Mantel des Zylinders $x^2 + y^2 = r^2$, und man kann das Ergebnis durch Abrollen des Zylinders mit dem Satz des Pythagoras bestätigen.

Anschaulich besteht eine Kurve aus ihrem Bild im $\mathbb{R}^n$ und einem Fahrplan, wie dieses Bild durchlaufen werden soll. In der Physik spielt der Fahrplan eine wesentliche Rolle, zum Beispiel für unsere Jahreszeiten. Die Bogenlänge ist jedoch eine geometrische Größe, und sollte nicht vom Fahrplan abhängen. Das soll nun präzisiert werden.

Definition 1.3 (Umparametrisierung) *Seien $\gamma_{1,2} : I_{1,2} \to \mathbb{R}^n$ parametrisierte Kurven. Dann heißt γ_2 Umparametrisierung von γ_1, falls eine Bijektion $\varphi \in C^1(I_2, I_1)$ mit $\varphi' \neq 0$ existiert, so dass $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$.*

Die Bijektion φ nennt man auch Parametertransformation. An dieser Stelle ergibt sich die Frage, warum wir die Bedingung $\varphi' \neq 0$ verlangen. Eine Antwort ist, dass wir jedenfalls die Differenzierbarkeit der Parametertransformationen verlangen wollen, außerdem sollte die Sache symmetrisch bezüglich γ_1 und γ_2 sein. Die Bedingung $\varphi' \neq 0$ ist aber äquivalent dazu, dass die inverse Parametertransformation φ^{-1} differenzierbar ist. Tatsächlich ist die Relation $\gamma_1 \sim \gamma_2$, falls γ_2 Umparametrisierung von γ_1, eine Äquivalenzrelation (Übungsaufgabe).

Lemma 1.1 (Invarianz der Bogenlänge) *Sind $\gamma_{1,2} \in C^1(I_{1,2}, \mathbb{R}^n)$ und ist γ_2 eine Umparametrisierung von γ_1, so folgt $L(\gamma_2) = L(\gamma_1)$.*

Beweis: Sei $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$ für $\varphi \in C^1(I_2, I_1)$ mit $\varphi' \neq 0$. Dann folgt je nach Vorzeichen von φ'

$$|\gamma_2'(t)| = |\gamma_1'(\varphi(t))||\varphi'(t)| = \pm|\gamma_1'(\varphi(t))|\varphi'(t),$$

also liefert die Substitution $s = \varphi(t)$ für $I_1 = [a_1, b_1]$ sowie $I_2 = [a_2, b_2]$

$$L(\gamma_2) = \int_{a_2}^{b_2} |\gamma_2'(t)|\, dt = \pm \int_{a_2}^{b_2} |\gamma_1'(\varphi(t)|\, \varphi'(t)\, dt = \pm \int_{\varphi(a_2)}^{\varphi(b_2)} |\gamma_1'(s)|\, ds = L(\gamma_1).$$

□

Es ist eine naheliegende Frage, ob für eine gegebene Kurve eine besonders schöne Umparametrisierung existiert. Was dabei besonders schön sein soll, sagt folgende Definition.

Definition 1.4 (Parametrisierung nach der Bogenlänge) *Eine Kurve $c \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ heißt nach der Bogenlänge parametrisiert, wenn gilt:*

$$|c'(s)| = 1 \quad \text{für alle } s \in I.$$

Physikalisch betrachtet wird eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Absolutgeschwindigkeit Eins durchlaufen. Geometrisch folgt für jedes Teilintervall $[a, b] \subset I$

$$L\big(c|_{[a,b]}\big) = \int_a^b |c'(s)|\, ds = (b - a),$$

das heißt das Intervall wird durch c längentreu abgebildet.

Satz 1.1 (Parametrisierung nach der Bogenlänge) *Sei $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ eine Kurve mit Länge $L = L(\gamma)$. Es gelte $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Dann gibt es eine C^1-Bijektion $\varphi : [0, L] \to [a, b]$ mit $\varphi' > 0$, so dass $c = \gamma \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.*

Beweis: Wir betrachten die Bogenlängenfunktion

$$\sigma : [a, b] \to [0, L],\ \sigma(t) = \int_a^t |\gamma'(\tau)|\, d\tau. \tag{1.1}$$

Es gilt $\sigma'(t) = |\gamma'(t)| > 0$ nach Voraussetzung, also ist σ eine Bijektion der Klasse C^1. Bezeichnet $\varphi : [0, L] \to [a, b]$ die Umkehrfunktion, so folgt

$$|(\gamma \circ \varphi)'(s)| = |\gamma'(\varphi(s))|\, \varphi'(s) = |\gamma'(\varphi(s))|\, \frac{1}{\sigma'(\varphi(s))} = 1.$$

□

Eine Kurve γ mit $\gamma'(t) \neq 0$ für alle t nennt man regulär (oder immergiert). Verzichtet man auf die Bedingung der Regularität, so kann das Bild sogar einer C^∞-Kurve Singularitäten aufweisen. Ein Beispiel ist die Neilsche Parabel $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^2, t^3)$. Das Bild $\gamma(\mathbb{R}) = \{(x, \pm x^{3/2}) : x \in \mathbb{R}\}$ hat eine Spitze im Nullpunkt. Die Regularität einer Kurve bleibt unter Umparametrisierungen erhalten, denn es gilt $(\gamma \circ \varphi)' = (\gamma' \circ \varphi)\varphi'$ mit $\varphi' \neq 0$ nach Definition. Insbesondere kann auf die Voraussetzung $\gamma' \neq 0$ in Satz 1.1 nicht verzichtet werden.

Ist der Endpunkt einer Kurve der Anfangspunkt einer zweiten Kurve, so ist es naheliegend, diese zu einer Kurve zusammenzusetzen. Im allgemeinen wird das Ergebnis dann keine C^1-Kurve mehr sein. Auch stückweise lineare Kurven sind in der Regel nicht C^1. Es ist daher praktisch, als Verallgemeinerung stückweise C^1-Kurven einzuführen.

Definition 1.5 (stückweise C^1) *Eine Kurve $\gamma \in C^0([a, b], \mathbb{R}^n)$ heißt stückweise C^1, wenn es eine Zerlegung $a = t_0 < \ldots < t_N = b$ gibt, so dass mit $I_k = [t_{k-1}, t_k]$ gilt:*

$$\gamma|_{I_k} \in C^1(I_k, \mathbb{R}^n) \quad \text{für alle } k = 1, \ldots, N.$$

Notation: $\gamma \in PC^1(I, \mathbb{R}^n)$ (piecewise continuously differentiable).

In den Unterteilungspunkten existieren die links- und rechtsseitigen Grenzwerte $\gamma'_\pm(t_i)$, die jedoch nicht übereinstimmen müssen. Setzen wir willkürlich $\gamma'(t_i) = 0$, so ist die Funktion $\gamma' : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stückweise stetig, insbesondere ist $|\gamma'| : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, siehe Kapitel 5, Abschnitt 1. Die Bogenlänge ist also auch für $\gamma \in PC^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ durch Definition 1.2 erklärt. Insbesondere hängt die Länge nicht von der Wahl der Unterteilung ab.

Im Folgenden bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ stets das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$.

Definition 1.6 *Ist $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $\gamma \in PC^1([a,b],\Omega)$, so heißt*

$$\int_\gamma F \cdot \vec{dx} := \int_a^b \langle F\big(\gamma(t)\big), \gamma'(t) \rangle \, dt$$

das Kurvenintegral von F längs c.

In der Physik ist zum Beispiel F das Gravitationsfeld, und das Kurvenintegral ergibt die Arbeit, die beim Transport einer Masse längs einer Kurve innerhalb des Feldes verrichtet wird. Dabei wird $\vec{dx}$ als vektorielles Längenelement interpretiert, und der Punkt $\cdot$ bedeutet das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$. Wir haben diese Notation übernommen, obwohl sie für uns rein symbolisch ist, das heißt $\vec{dx}$ hat keine eigene mathematische Bedeutung, ähnlich wie beim Riemannintegral. Das Kurvenintegral ist allein durch die rechte Seite in Definition 1.6 erklärt. Allerdings ist die Merkregel, dass $\vec{dx}$ durch $\gamma'(t)\,dt$ zu ersetzen ist, hilfreich.

Beispiel 1.3 (Gravitationsfeld) Das Gravitationsfeld der Sonne ist gegeben durch

$$F : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^3,\; F(x) = -C\frac{x}{|x|^3} \quad \text{mit } C > 0.$$

Beispiel 1.4 (Winkelvektorfeld) Wir betrachten hier das Vektorfeld

$$W : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^2,\; W(x,y) = \Big(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\Big).$$

Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, $\gamma(t) = r(t)\big(\cos\theta(t), \sin\theta(t)\big)$ mit $r, \theta \in C^1(I)$, so folgt

$$(1.2) \qquad \int_\gamma W \cdot \vec{dx} = \int_a^b \left\langle \frac{1}{r}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ cos\theta \end{pmatrix}, r'\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + r\theta'\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right\rangle dt = \theta(b) - \theta(a).$$

Also liefert das Kurvenintegral von W die Differenz der Polarwinkel von Endpunkt und Anfangspunkt der Kurve.

Eine Parametertransformation $\varphi : I_2 \to I_1$ heißt orientierungserhaltend (bzw. orientierungsumkehrend), wenn $\varphi' > 0$ (bzw. $\varphi' < 0$) ist. Anschaulich wird bei Umparametrisierung mit einer orientierungsumkehrenden Parametertransformation die Kurve umgekehrt durchlaufen, Anfangs- und Endpunkt tauschen ihre Rollen. Während die Bogenlänge unter allen Umparametrisierungen invariant ist, ist das Kurvenintegral nur bei orientierungserhaltenden Umparametrisierungen invariant, bei orientierungsumkehrenden Umparametrisierungen wechselt es sein Vorzeichen. Dies wird sogleich gezeigt.

Lemma 1.2 *Das Kurvenintegral hat folgende Eigenschaften:*

(a) *Linearität: sind* $F_{1,2} \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^2)$ *und* $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, *so gilt für* $\gamma \in PC^1([a,b], \Omega)$

$$\int_\gamma (\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2) \cdot \vec{dx} = \lambda_1 \int_\gamma F_1 \cdot \vec{dx} + \lambda_2 \int_\gamma F_2 \cdot \vec{dx}.$$

(b) *Additivität bei Zerlegungen: ist* $\gamma \in PC^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ *und* $a = t_0 < \ldots < t_N = b$ *eine beliebige Zerlegung von* $[a,b]$, *so folgt mit* $\gamma_i = \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$

$$\int_\gamma F \cdot \vec{dx} = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} F \cdot \vec{dx}.$$

(c) *Invarianz bei Umparametrisierungen: sei* $\gamma \in PC^1(I_1, \mathbb{R}^2)$ *und* $\varphi \in C^1(I_2, I_1)$ *eine Parametertransformation. Dann gilt, je nach Vorzeichen von* φ',

$$\int_{\gamma \circ \varphi} F \cdot \vec{dx} = \pm \int_\gamma F \cdot \vec{dx}.$$

Beweis: (a) und (b) folgen aus der Definition und den Eigenschaften des Riemannintegrals. Für (c) sei $I_1 = [a_1, b_1]$ und $I_2 = [a_2, b_2]$. Mit der Substitution $\varphi(t) = s$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma \circ \varphi} F \cdot \vec{dx} &= \int_{a_2}^{b_2} \langle (F \circ \gamma \circ \varphi)(t), (\gamma \circ \varphi)'(t) \rangle \, dt \\
&= \int_{a_2}^{b_2} \langle F \circ \gamma(\varphi(t)), \gamma'(\varphi(t)) \rangle \varphi'(t) \, dt \\
&= \int_{\varphi(a_2)}^{\varphi(b_2)} \langle (F \circ \gamma)(s), \gamma'(s)) \rangle ds.
\end{aligned}$$

Ist φ orientierungserhaltend, so gilt $\varphi(a_2) = a_1$ und $\varphi(b_2) = b_1$ und wir bekommen das Kurvenintegral. Ist φ orientierungsumkehrend, so sind die Grenzen vertauscht und wir bekommen das negative Kurvenintegral. □

Wir benötigen wie beim Riemann-Integral eine Standardabschätzung des Kurvenintegrals.

Lemma 1.3 *Sei* $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen, und* $\gamma \in PC^1(I, \Omega)$ *mit* $I = [a,b]$. *Dann gilt mit* $\|F \circ \gamma\|_I = \sup_{t \in I} |F(\gamma(t))|$

$$\left| \int_\gamma F \cdot \vec{dx} \right| \leq \|F \circ \gamma\|_I \, L(\gamma).$$

Beweis: Aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz und der Standardabschätzung des Riemann-Integrals folgt

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt \right| &\leq \int_a^b \big| \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \big| \, dt \\
&\leq \int_a^b \big| F(\gamma(t)) \big| \, \big| \gamma'(t) \big| \, dt \\
&\leq \|F \circ \gamma\|_I \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt \\
&= \|F \circ \gamma\|_I \, L(\gamma).
\end{aligned}$$

□

Die Physiker nennen das Gravitationsfeld konservativ, weil der Energieerhaltungssatz gilt. Die verrichtete Arbeit zum Beispiel bei Transport einer Masse vom Mathematischen Institut zum Kandel entspricht genau der zugewonnen Lageenergie, und diese kommt beim Herunterrollen auch wieder heraus, theoretisch jedenfalls. Der Begriff des konservativen Feldes ist auch in der Mathematik interessant.

Definition 1.7 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein Vektorfeld $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ heißt Gradientenfeld (bzw. konservativ), wenn es eine Funktion $\varphi \in C^1(\Omega)$ gibt mit $\operatorname{grad} \varphi = F$. Die Funktion φ heißt Stammfunktion (bzw. Potential) von F.*

Lemma 1.4 (Eindeutigkeit der Stammfunktion) *Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ wegweise zusammenhängend, so ist eine Stammfunktion von $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ eindeutig bestimmt, bis auf eine additive Konstante.*

BEWEIS: Sind $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1(\Omega)$ Stammfunktionen von F, so folgt

$$\operatorname{grad}(\varphi_2 - \varphi_1) = \operatorname{grad} \varphi_2 - \operatorname{grad} \varphi_1 = F - F = 0,$$

also ist $\varphi_2 - \varphi_1$ konstant nach Satz 1.1, das heißt $\varphi_2 = \varphi_1 + c$. □

Wir werden jetzt sehen, dass die Existenz einer Stammfunktion gleichbedeutend damit ist, dass das Kurvenintegral für Kurven mit gleichem Anfangs- und Endpunkt stets denselben Wert hat. Zuvor eine Definition.

Definition 1.8 *Eine Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt geschlossen, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$.*

Aus $\gamma(a) = \gamma(b)$ folgt nicht notwendig $\gamma'(a) = \gamma'(b)$, zum Beispiel ist im Fall der Acht aus Beispiel 1.1 $\gamma(\pi/2) = \gamma(3\pi/2) = (0,0)$, während $\gamma'(\pi/2) = (-1,-2) \neq (1,-2) = \gamma'(3\pi/2)$. Anschaulich schneidet sich die Kurve hier mit einem Winkel.

Satz 1.2 (Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und wegweise zusammenhängend. Für ein Vektorfeld $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *F ist ein Gradientenfeld.*

(b) *Für jede geschlossene Kurve $\gamma \in PC^1([a,b], \Omega)$ ist $\int_\gamma F \cdot \vec{dx} = 0$.*

(c) *Für je zwei Kurven $\gamma_0, \gamma_1 \in PC^1([a,b], \Omega)$ mit $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$, $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ gilt*

$$\int_{\gamma_0} F \cdot \vec{dx} = \int_{\gamma_1} F \cdot \vec{dx}.$$

BEWEIS: Ist $F = \operatorname{grad} \varphi$ mit $\varphi \in C^1(\Omega)$, so folgt für $\gamma \in PC^1([a,b], \Omega)$ geschlossen

$$\int_\gamma F \cdot \vec{dx} = \int_a^b \langle \operatorname{grad} \varphi(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt = \int_a^b (\varphi \circ \gamma)'(t) \, dt = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) = 0.$$

Für $\gamma_{0,1} \in PC^1([a,b], \Omega)$ mit gleichem Anfangs- und Endpunkt ist die Kurve

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_0(t) & a \le t \le b \\ \gamma_1(2b - t) & b \le t \le 2b - a \end{cases}$$

geschlossen und stückweise C^1, und aus (b) ergibt sich mit Lemma 1.2

$$0 = \int_\gamma F \cdot \vec{dx} = \int_{\gamma_0} F \cdot \vec{dx} - \int_{\gamma_1} F \cdot \vec{dx}.$$

Für (c) $\Rightarrow$ (a) sei $x_0 \in \Omega$ fest. Zu $x \in \Omega$ wählen wir eine Kurve $\gamma_x \in PC^1([0,1],\Omega)$ mit $\gamma_x(0) = x_0$ und $\gamma_x(1) = x$, und setzen

$$\varphi(x) = \int_{\gamma_x} F \cdot \vec{dx}.$$

Die Existenz von γ_x ist gesichert nach Lemma 1.2 in Kapitel 7, genauer können wir γ_x stückweise linear wählen. Nach Voraussetzung (c) hängt das Kurvenintegral nicht von der Wahl von γ_x ab. Daher ist die Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ wohldefiniert. Sei nun $x \in \Omega$. Für $|h|$ klein erhalten wir eine Kurve von x_0 nach $x + he_j$, indem wir γ_x mit der Kurve $c : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $c(t) = x + the_j$, zusammensetzen. Es folgt

$$\frac{\varphi(x+he_j) - \varphi(x)}{h} = \int_c F \cdot \vec{dx} = \int_0^1 \langle F(x+the_j), e_j \rangle \, dt \to F_j(x) \quad \text{mit } h \to 0.$$

Also gilt $\partial_j \varphi = F_j$ für $j = 1, \ldots, n$. □

Die zentrale Frage dieses Kapitels ist: wie können wir entscheiden, ob ein gegebenes Vektorfeld ein Gradientenfeld ist? Für C^1-Vektorfelder gibt es eine notwendige Bedingung, die offensichtlich ist.

Satz 1.3 (Rotationsfreiheit von Gradientenfeldern) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ist $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ein Gradientenfeld, so gilt für alle $i, j = 1, \ldots, n$*

$$\partial_i F_j = \partial_j F_i \quad \text{in } \Omega.$$

Beweis: Ist $F = \operatorname{grad} \varphi$, so folgt $\varphi \in C^2(\Omega)$ und wegen der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen, Satz 2.2 in Kapitel 6, gilt

$$\partial_i F_j = \partial_i \partial_j \varphi = \partial_j \partial_i \varphi = \partial_j F_i.$$

□

Für $n = 3$ lässt sich die Bedingung schreiben als $\operatorname{rot} F = 0$, wobei

$$\operatorname{rot} F = (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1).$$

Beispiel 1.5 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (-y, x)$, hat keine Stammfunktion auf $\mathbb{R}^2$, denn

$$\partial_1 F_2 = 1, \text{ aber } \partial_2 F_1 = -1.$$

Beispiel 1.6 Für das Winkelvektorfeld

$$W : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^2,\ W(x,y) = \Big(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \Big)$$

vgl. Beispiel 1.4, berechnen wir

$$\partial_1 W_2 = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \partial_2 W_1,$$

das heißt die notwendige Bedingung aus Satz 1.3 ist erfüllt. Dennoch ist das Kurvenintegral nicht wegunabhängig: für $k \in \mathbb{Z}$ und $r > 0$ ist die Kurve $\gamma_k : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, $\gamma_k(t) = r(\cos kt, \sin kt)$, geschlossen und es gilt nach Beispiel 1.4

$$\int_{\gamma_k} W \cdot \vec{dx} = 2\pi k \quad (\neq 0 \text{ für } k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}).$$

Wir wollen jetzt untersuchen, wie sich das Kurvenintegral längs einer Schar von Kurven ändert. Statt Schar verwenden wir den moderneren Ausdruck Homotopie. Dies ist ein fundamentales Konzept der Analysis.

Definition 1.9 (Homotopie) *Eine Homotopie in Ω zwischen Kurven $\gamma_0, \gamma_1 \in C^0([a,b], \Omega)$ ist eine Abbildung $\gamma \in C^0([a,b] \times [0,1], \Omega)$ mit*

$$\gamma(\cdot, 0) = \gamma_0 \quad \text{und} \quad \gamma(\cdot, 1) = \gamma_1.$$

Gilt $\gamma_0(a) = \gamma_1(a) = p$, $\gamma_0(b) = \gamma_1(b) = q$, und gibt es eine Homotopie mit $\gamma(a,t) = p$, $\gamma(b,t) = q$ für alle $t \in [0,1]$, so heißen γ_0, γ_1 homotop in Ω mit festen Endpunkten. Gilt $\gamma_0(a) = \gamma_0(b)$, $\gamma_1(a) = \gamma_1(b)$, und gibt es eine Homotopie mit $\gamma(a,t) = \gamma(b,t)$ für alle $t \in [0,1]$, so heißen γ_0, γ_1 in Ω geschlossen homotop.

Es gilt folgende allgemeine Formel für die Änderung des Kurvenintegrals unter (hinreichend glatten) Homotopien.

Lemma 1.5 (Homotopieformel) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt für $\gamma \in C^1([a,b] \times [0,1], \Omega)$, falls $\partial_s \partial_t \gamma \in C^0([a,b] \times [0,1], \mathbb{R}^2)$,*

$$\begin{aligned}\int_{\gamma(\cdot,1)} F \cdot \vec{dx} - \int_{\gamma(\cdot,0)} F \cdot \vec{dx} \;&=\; \int_{\gamma(b,\cdot)} F \cdot \vec{dx} - \int_{\gamma(a,\cdot)} F \cdot \vec{dx} \\ &\quad + \int_0^1 \int_a^b \Big(\big\langle DF \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \big\rangle - \big\langle DF \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \big\rangle \Big)\, ds dt.\end{aligned}$$

Gilt $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ für $i, j = 1, \ldots, n$, und hat die Homotopie feste Endpunkte oder ist geschlossen, so ist die rechte Seite Null.

Beweis: Nach Zusatz zum Satz von Schwarz, Satz 2.2 in Kapitel 6, gilt $\partial_t \partial_s \gamma = \partial_s \partial_t \gamma$. Wir berechnen mit Satz 4.2 und partieller Integration bezüglich $s \in [a,b]$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \int_{\gamma(\cdot,t)} F \cdot \vec{dx} \;&=\; \frac{\partial}{\partial t} \int_a^b \big\langle F(\gamma(s,t), \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s,t) \big\rangle\, ds \\ &=\; \int_a^b \big\langle DF \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \big\rangle\, ds + \int_a^b \big\langle F \circ \gamma, \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial s} \big\rangle\, ds \\ &=\; \int_a^b \big\langle DF \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \big\rangle\, ds + \big\langle F \circ \gamma, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \big\rangle \Big|_{s=a}^{s=b} - \int_a^b \big\langle DF \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \big\rangle\, ds.\end{aligned}$$

Integration bezüglich t ergibt die Formel. Ist $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ oder mit anderen Worten DF symmetrisch, so verschwindet das Doppelintegral. Bei festen Endpunkten sind $\gamma(\cdot, a)$ und $\gamma(\cdot, b)$ konstant, also die zugehörigen Kurvenintegrale Null. Ist die Homotopie geschlossen, so gilt $\gamma(\cdot, a) = \gamma(\cdot, b)$ und die Kurvenintegrale rechts heben sich gegenseitig weg. □

Wir können an dieser Stelle als Anwendung den Fundamentalsatz der Algebra (Kapitel 2, Satz 3.10) beweisen. Es gibt vielleicht einfachere Beweise, aber dieses Argument ist jedenfalls sehr anschaulich.

Satz 1.4 (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes komplexe Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$.*

Beweis: Wir verwenden das Winkelvektorfeld $W : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^2$. Nach Beispiel 1.6 gilt $\partial_1 W_2 = \partial_2 W_1$. Sei $p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{C}$ und $n \geq 1$. Schreibe $p(z) = p_n(z) + q(z)$ mit $p_n(z) = z^n$. Da q höchstens den Grad $n-1$ hat, gilt $z^{-n} q(z) \to 0$ mit $|z| \to \infty$, also für $R > 0$ hinreichend groß

$$|q(Re^{i\theta})| \leq \frac{1}{2} R^n \quad \text{für } \theta \in [0, 2\pi].$$

Betrachte nun die geschlossene Kurve $\gamma_0 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_0(\theta) = p(Re^{i\theta})$, und die Homotopie

$$\gamma : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(\theta, t) = p_n(Re^{i\theta}) + (1-t) q(Re^{i\theta}).$$

Wir berechnen

$$|\gamma(\theta, t)| \geq |p_n(Re^{i\theta})| - |q(Re^{i\theta})| \geq R^n - \frac{1}{2} R^n > 0.$$

Da $\gamma(\theta, 1) = p_n(Re^{i\theta}) = R^n e^{in\theta}$, folgt aus Lemma 1.5 und Beispiel 1.6

$$\int_{\gamma_0} W \cdot \vec{dx} = \int_{\gamma(\cdot, 1)} W \cdot \vec{dx} = 2\pi n.$$

Wir betrachten jetzt eine zweite, ebenfalls glatte Homotopie:

$$\tilde{\gamma} : [0, 2\pi] \times [0, R] \to \mathbb{R}^2,\ \tilde{\gamma}(\theta, \varrho) = p(\varrho e^{i\theta}).$$

Es ist $\tilde{\gamma}(\theta, 0) = p(0) = a_0$ eine konstante Abbildung. Hätte p keine Nullstelle in $\mathbb{C}$, so ist auch dies eine geschlossene Homotopie in $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, und es folgt wieder mit Lemma 1.5

$$\int_{\gamma_0} W \cdot \vec{dx} = \int_{\tilde{\gamma}(\cdot, 0)} W \cdot \vec{dx} = 0,$$

das heißt $2\pi n = 0$, ein Widerspruch. □

Lemma 1.6 (affine Homotopie) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ für $i, j = 1, \ldots, n$. Für Kurven $\gamma_0, \gamma_1 \in PC^1([a, b], \Omega)$ betrachte die affine Homotopie*

$$\gamma : [a, b] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n,\ \gamma(s, t) = (1-t)\gamma_0(s) + t\gamma_1(s).$$

Haben γ_0, γ_1 gleiche Endpunkte oder sind geschlossen, und gilt $\gamma([a, b] \times [0, 1]) \subset \Omega$, so folgt

$$\int_{\gamma_0} F \cdot \vec{dx} = \int_{\gamma_1} F \cdot \vec{dx}.$$

Beweis: Sind $\gamma_0, \gamma_1 \in C^1([a, b], \Omega)$, so folgt die Aussage direkt aus Lemma 1.5. Für γ_0, γ_1 stückweise C^1 zerlegen wir $[a, b]$ in Teilintervalle, auf denen beide Kurven C^1 sind, und wenden Lemma 1.5 auf den Teilintervallen an. Die Randintegrale heben sich bei Addition heraus. □

Satz 1.5 (Homotopieinvarianz des Kurvenintegrals) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ auf Ω für $1 \leq i, j \leq n$. Sind dann $\gamma_0, \gamma_1 \in PC^1([a, b], \Omega)$ homotop in Ω mit festen Endpunkten (oder geschlossen homotop), so gilt*

$$\int_{\gamma_0} F \cdot \vec{dx} = \int_{\gamma_1} F \cdot \vec{dx}.$$

Beweis: Ist die Homotopie hinreichend glatt, so folgt die Aussage aus Lemma 1.5. Es geht also um das technische Problem, dass die gegebene Homotopie $\gamma \in C^0([a,b] \times [0,1], \Omega)$ eventuell nur stetig ist. Die Lektüre des Beweises könnte zurückgestellt werden.

Aus Kompaktheitsgründen gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_{2\varepsilon}(p) \subset \Omega$ für alle $p \in \gamma([a,b] \times [0,1])$, vgl. Lemma 1.1 in Kapitel 7. Da γ auf der kompakten Menge $[a,b] \times [0,1]$ gleichmäßig stetig ist, gibt es weiter ein $\delta > 0$ mit

$$|\gamma(s_0,t) - \gamma(s_1,t)|,\ |\gamma(s,t_0) - \gamma(s,t_1)| < \varepsilon \quad \text{für } |s_0 - s_1|,\ |t_0 - t_1| < \delta.$$

Wir ersetzen jetzt $\gamma(\cdot,t)$ durch stückweise lineare Kurven. Für $N \in \mathbb{N}$ mit $(b-a)/N < \delta$ und $s_k = a + k(b-a)/N$, $k = 0, 1, \ldots, N$, definieren wir $\tilde{\gamma} : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\tilde{\gamma}(s,t) = \frac{s_k - s}{s_k - s_{k-1}}\gamma(s_{k-1},t) + \frac{s - s_{k-1}}{s_k - s_{k-1}}\gamma(s_k,t) \quad \text{für } s \in [s_{k-1}, s_k].$$

Es gilt $\tilde{\gamma}(a,t) = \gamma(a,t)$, $\tilde{\gamma}(b,t) = \gamma(b,t)$ für alle $t \in [0,1]$. Für $s \in [s_{k-1}, s_k]$ haben wir

$$|\tilde{\gamma}(s,t) - \gamma(s,t)| = \Big|\frac{s_k - s}{s_k - s_{k-1}}\big(\gamma(s_{k-1},t) - \gamma(s,t)\big) + \frac{s - s_{k-1}}{s_k - s_{k-1}}\big(\gamma(s_k,t) - \gamma(s,t)\big)\Big| < \varepsilon.$$

Für $\lambda \in [0,1]$ folgt $\big|\big(1-\lambda)\gamma(s,t) + \lambda\tilde{\gamma}(s,t)\big) - \gamma(s,t)\big| \leq |\tilde{\gamma}(s,t) - \gamma(s,t)| < \varepsilon$, das heißt die affine Homotopie zwischen $\gamma(\cdot,t)$ und $\tilde{\gamma}(\cdot,t)$ liegt in Ω. Insbesondere folgt aus Lemma 1.6

$$\int_{\gamma_0} F \cdot \vec{dx} = \int_{\tilde{\gamma}(\cdot,0)} F \cdot \vec{dx} \quad \text{und} \quad \int_{\gamma_1} F \cdot \vec{dx} = \int_{\tilde{\gamma}(\cdot,1)} F \cdot \vec{dx}. \tag{1.3}$$

Weiter gilt für $|t_0 - t_1| < \delta$ und $s \in [s_{k-1}, s_k]$

$$|\tilde{\gamma}(s,t_0) - \tilde{\gamma}(s,t_1)| = \Big|\frac{s_k - s}{s_k - s_{k-1}}\big(\gamma(s_{k-1},t_0) - \gamma(s_{k-1},t_1)\big) + \frac{s - s_{k-1}}{s_k - s_{k-1}}\big(\gamma(s_k,t_0) - \gamma(s_k,t_1)\big)\Big| < \varepsilon,$$

und es folgt für alle $\lambda \in [0,1]$

$$\big|\big((1-\lambda)\tilde{\gamma}(s,t_0) + \lambda\tilde{\gamma}(s,t_1)\big) - \gamma(s,t_0)\big| \leq \big|\tilde{\gamma}(s,t_1) - \tilde{\gamma}(s,t_0)\big| + \big|\tilde{\gamma}(s,t_0) - \gamma(s,t_0)\big| < 2\varepsilon.$$

Für $1/N < \delta$ folgt mit $t_l = l/N$ für $l = 0, 1, \ldots, N$ aus Lemma 1.6

$$\int_{\tilde{\gamma}(\cdot,t_l)} F \cdot \vec{dx} = \int_{\tilde{\gamma}(\cdot,t_{l-1})} F \cdot \vec{dx} \quad \text{für } l = 1, \ldots, N,$$

und Kombination mit (1.3) beweist den Satz. □

Definition 1.10 *Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt einfach zusammenhängend, wenn jede geschlossene Kurve $\gamma \in C^0([a,b], \Omega)$ in Ω geschlossen homotop zu einer konstanten Kurve ist.*

Beispiel 1.7 Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig, wenn es ein $x_0 \in \Omega$ gibt mit

$$(1-t)x + tx_0 \in \Omega \quad \text{für alle } x \in \Omega,\ t \in [0,1].$$

Eine sternförmige Menge ist einfach zusammenhängend, denn jede geschlossene Kurve $\gamma_0 \in C^0([a,b], \Omega)$ ist homotop zur konstanten Kurve in x_0, nämlich durch die Homotopie

$$\gamma : [a,b] \times [0,1] \to \Omega,\ \gamma(s,t) = (1-t)\gamma_0(s) + tx_0.$$

Satz 1.6 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und einfach zusammenhänged. Dann sind für ein Vektorfeld $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *$\partial_i F_j = \partial_j F_i$ für $i, j = 1, \ldots, n$.*

(b) *F hat eine Stammfunktion.*

Beweis: Aus (a) folgt mit Satz 1.5 für jeden geschlossenen Weg $\gamma \in PC^1([a,b], \Omega)$

$$\int_\gamma F \cdot \vec{dx} = 0.$$

Hieraus ergibt sich mit Satz 1.2 die Existenz einer Stammfunktion. Die umgekehrte Implikation wurde schon in Satz 1.3 festgestellt. $\square$

Beispiel 1.8 Ein Spezialfall von Satz 1.6 ist das Lemma von Poincaré: ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig und $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ rotationsfrei, so besitzt F eine Stammfunktion φ. Tatsächlich kann diese explizit angegeben werden: Integration längs $\gamma_x(t) = (1-t)x_0 + tx$, $t \in [0,1]$, ergibt

$$\varphi(x) = \int_{\gamma_x} F \cdot \vec{dx} = \int_0^1 \langle F((1-t)x_0 + tx, x - x_0\rangle \, dt.$$

Wir fassen unsere Resultate über Kurvenintegrale in einer kleinen Tabelle zusammen:

$$\begin{array}{ccc}
F \text{ Gradientenfeld} & \overset{\text{Satz 1.2}}{\Longleftrightarrow} & \int F \cdot \vec{dx} \text{ wegunabhängig} \\
\Downarrow \text{Satz 1.3} & \Uparrow \text{1-fach zshg. Satz 1.6} \Uparrow & \Downarrow \\
\partial_i F_j = \partial_j F_i & \overset{\text{Satz 1.5}}{\Longleftrightarrow} & \int F \cdot \vec{dx} \text{ homotopieinvariant}
\end{array}$$

Zu begründen ist noch die Implikation von rechts nach links in der unteren Zeile. Ist das Kurvenintegral homotopieinvariant, so ist es auf einer Umgebung $B_\varrho(x) \subset \Omega$ aber wegunabhängig. Also hat das Vektorfeld auf $B_\varrho(x)$ eine Stammfunktion, und es folgt $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ auf $B_\varrho(x)$.

Wir wollen zum Schluss des Abschnitts eine alternative Notation für Kurvenintegrale einführen, die auf lange Sicht das überlegene Konzept ist. Wir brauchen dazu den Raum $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ aller Linearformen auf $\mathbb{R}^n$, mit anderen Worten den Dualraum $(\mathbb{R}^n)^*$.

Definition 1.11 (1-Form) *Eine Abbildung $\alpha : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ heißt Differentialform vom Grad Eins oder kurz 1-Form (oder auch Kovektorfeld) auf Ω.*

Für $f \in C^1(\Omega)$ ist die Ableitung df (die wir in diesem Kontext mit einem kleinen d statt einem großen D schreiben) eine 1-Form, das sogenannte Differential von f:

$$df : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*, \; df(x)v = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) v_j.$$

Speziell bezeichnet man die Differentiale der n Koordinatenfunktionen $x \mapsto x_i$ auf $\mathbb{R}^n$ mit $dx_i : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$. Es gilt also

$$dx_i(x)v = v_i, \quad \text{insbesondere } dx_i(x)e_j = \delta_{ij}.$$

Da $dx_i(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gleich ist, das heißt die Abbildung $dx_i : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$ ist konstant, wird die Variable x meistens weggelassen und stattdessen ein Punkt geschrieben, also $dx_i(x)v = dx_i \cdot v$. Jede 1-Form auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ hat nun eine eindeutige Darstellung

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i \quad \text{mit } \alpha_i : \Omega \to \mathbb{R},\ \alpha_i(x) = \alpha(x)e_i.$$

Dies folgt sofort, wenn wir an der Stelle $x \in \Omega$ beide Seiten auf die Basis $e_1, \ldots, e_n$ anwenden. Die $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sind die Koordinatenfunktionen von α. Für das Differential einer Funktion gilt beispielweise

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Eine Form $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i$ auf Ω ist von der Klasse C^k, falls $\alpha_i \in C^k(\Omega)$ für $i = 1, \ldots, n$.

Definition 1.12 (Kurvenintegral von 1-Formen) *Sei α eine stetige 1-Form auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Für $\gamma \in PC^1([a,b],\Omega)$ setzen wir*

$$\int_\gamma \alpha = \int_a^b \alpha(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt.$$

Das Standardskalarprodukt erlaubt es, jedem Vektorfeld eine 1-Form bijektiv zuzuordnen, und zwar definiert man für das Vektorfeld $A : \Omega \to \mathbb{R}^n$ die 1-Form $\alpha : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ durch

$$\alpha(x)v = \langle A(x), v\rangle \quad \text{für } x \in \Omega,\ v \in \mathbb{R}^n.$$

Dann haben A und α die gleichen Koordinatenfunktionen, denn es ist

$$\alpha_i(x) = \alpha(x)e_i = \langle A(x), e_i\rangle = A_i(x);$$

Insbesondere ist die Gleichung $A = \operatorname{grad}\varphi$ äquivalent zu $\alpha = d\varphi$. Etwas abstrakter ergibt sich das auch aus der Charakterisierung des Gradienten in Gleichung (3.5), Kapitel 6:

$$A = \operatorname{grad}\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \langle A(x), v\rangle = d\varphi(x)v \ \text{ für alle } x \in \Omega,\ v \in \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = d\varphi.$$

Nach Definition von α gilt weiter $\alpha(\gamma(t))\gamma'(t) = \langle A(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$, und damit

$$\int_\gamma \alpha = \int_\gamma A \cdot \vec{dx}.$$

Es wird folgende Terminologie eingeführt.

Definition 1.13 *Eine 1-Form α auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt*

(a) *exakt, wenn es eine Funktion $\varphi \in C^1(\Omega)$ gibt mit $\alpha = d\varphi$,*

(b) *geschlossen, wenn $\alpha \in C^1$ und $\partial_i \alpha_j = \partial_j \alpha_i$ auf Ω für $i, j = 1, \ldots, n$.*

Ist α dem Vektorfeld A zugeordnet, so ist demnach α genau dann exakt, wenn A ein Gradientenfeld ist, und genau dann geschlossen, wenn A rotationsfrei ist. Wir können somit alle unsere Resultate in der Sprache der 1-Formen neu forumulieren:

- genau dann ist α exakt, wenn das Kurvenintegral wegunabhängig ist;
- ist α exakt, so auch geschlossen;
- ist α geschlossen, so ist das Kurvenintegral homotopieinvariant;
- auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet ist jede geschlossene 1-Form exakt.

Der Vorteil der 1-Formen gegenüber den anschaulicheren Vektorfeldern liegt nun im Transformationsverhalten. Seien dazu $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen, und $\phi \in C^1(U,V)$. Ist ω eine 1-Form auf V, so erhalten wir eine 1-Form $\phi^*\omega$ auf U, den pullback von ω unter ϕ, durch die Formel

$$(\phi^*\omega)(x)v = \omega(\phi(x))D\phi(x)v \qquad \text{für } x \in U,\, v \in \mathbb{R}^n.$$

Sind dy_i die Koordinatendifferentiale auf $\mathbb{R}^m$, so berechnen wir

$$(\phi^* dy_i)(x)v = dy_i \cdot D\phi(x)v = d\phi_i(x)v$$

beziehungsweise kurz $\phi^* dy_i = d\phi_i$ für $i = 1, \ldots, m$, und allgemeiner

$$\phi^*\omega = \sum_{i=1}^m (\omega_i \circ \phi) d\phi_i \qquad \text{mit} \qquad d\phi_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} dx_j.$$

Ist $\phi \in C^{k+1}$ und $\omega \in C^k$ für $k \in \mathbb{N}_0$, so ist demnach $\phi^*\omega \in C^k$.

Satz 1.7 (Transformation des Kurvenintegrals) *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $\phi \in C^1(U,V)$. Für eine stetige 1-Form ω auf V und $\gamma \in PC^1([a,b],U)$ gilt*

$$\int_{\phi\circ\gamma} \omega = \int_\gamma \phi^*\omega.$$

Beweis: Aus den Definitionen ergibt sich

$$\int_{\phi\circ\gamma} \omega = \int_a^b \omega\big(\phi(\gamma(t))\big) D\phi(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = \int_a^b (\phi^*\omega)(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = \int_\gamma \phi^*\omega.$$

□

Das Kurvenintegral von Vektorfeldern benutzt wesentlich das Skalarprodukt, was bei der Analyse des Transformationsverhaltens mit berücksichtigt werden müsste. Bei der Umrechnung des Laplaceoperators auf krummlinige Koordinaten wird uns so etwas noch begegnen.

2 Komplexe Analysis

In diesem Abschnitt wollen wir einen kurzen Ausflug in die komplexe Analysis – die sogenannte Funktionentheorie – unternehmen, und zwar wollen wir jetzt komplexe Kurvenintegrale betrachten. Im folgenden sei stets Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

Definition 2.1 *Die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt komplex differenzierbar in $z \in \Omega$ mit Ableitung $f'(z) = c \in \mathbb{C}$, falls gilt:*

$$\lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = c.$$

f heißt komplex differenzierbar oder holomorph auf Ω, wenn f in allen $z \in \Omega$ komplex differenzierbar ist.

Formal ist diese Definition völlig analog zur Definition der Differenzierbarkeit einer Funktion einer reellen Variablen, nur dass eben jetzt der Differenzenquotient in $\mathbb{C}$ statt in $\mathbb{R}$ gebildet wird. Demzufolge gelten auch alle üblichen Differentiationsregeln:

- Differenzierbarkeit in $z \in \Omega$ impliziert Stetigkeit in $z \in \Omega$.
- Linearität der Ableitung: für $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.
- Produktregel: für $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ gilt $(fg)' = f'g + fg'$.
- Quotientenregel: für $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $g \neq 0$ gilt $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
- Kettenregel: für offene $U, V \subset \mathbb{C}$ und $f : U \to V$, $g : V \to \mathbb{C}$ gilt $(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$.

Die Beweise sind weitgehend analog zu den reellen Beweisen und wir wollen aus Zeitgründen darauf verzichten. Wir halten nur fest, dass zum Beispiel Polynome $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ differenzierbar sind mit Ableitung $P'(z) = a_1 + \ldots + n a_n z^{n-1}$. Soweit verläuft die Diskussion der komplexen Differenzierbarkeit also ganz parallel zum reellen Fall.

Vergessen wir die komplexe Multiplikation, so ist $\mathbb{C}$ nichts anderes als der $\mathbb{R}^2$ mit Standardbasis $1 = (1, 0)$ und $i = (0, 1)$. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ist dann eine vektorwertige Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \big(u(x, y), v(x, y)\big)$, wobei

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy) \quad \text{und} \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy).$$

Es stellt sich nun die Frage: in welcher Beziehung stehen die komplexe Differenzierbarkeit von f und die Differenzierbarkeit als reelle, vektorwertige Funktion?

Satz 2.1 (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen) *Für $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *f ist auf Ω komplex differenzierbar.*

(b) *$f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ ist (reell) differenzierbar mit $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$.*

Beweis: Die Multiplikation mit einer komplexen Zahl c ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, genauer gilt für $c = a + ib$ mit einer einfachen Rechnung

$$cz = Cz \quad \text{mit } C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Auf der linken Seite steht dabei das Produkt der komplexen Zahlen c und z, rechts die Anwendung der Matrix $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ auf den Vektor $z \in \mathbb{R}^2$. Ist f in $z \in \Omega$ komplex differenzierbar mit $f'(z) = c$, so folgt mit dieser Wahl von C

$$\frac{f(w) - f(z) - C(w-z)}{|w-z|} = \frac{f(w) - f(z) - c(w-z)}{w-z} \, \frac{w-z}{|w-z|} \to 0,$$

also gilt $Df(z) = C$. Außerdem erhalten wir mit $f = u + iv$ im Punkt z die Gleichungen

$$f' = u_x - iu_y = v_y + iv_x = \frac{1}{2}\big(f_x - if_y\big). \tag{2.4}$$

Sei jetzt umgekehrt f reell differenzierbar in $z = (x, y)$, und die Cauchy-Riemann Gleichungen seien im Punkt z erfüllt. Dann gilt für $a = u_x$ und $b = -u_y$

$$Df(z) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

also folgt mit $c = a + ib$ für $w \to z$

$$\frac{f(w) - f(z) - c(w-z)}{w-z} = \frac{f(w) - f(z) - Df(z)(w-z)}{|w-z|} \, \frac{|w-z|}{w-z} \to 0.$$

□

Die komplexe Differenzierbarkeit ist also stärker als die reelle Differenzierbarkeit der vektorwertigen Funktion, und zwar müssen die partiellen Ableitungen zusätzlich die Gleichungen $u_x = v_y$ sowie $u_y = -v_x$ erfüllen. Wir wollen als nächstes das komplexe Kurvenintegral definieren. Das Riemann-Integral einer $\mathbb{C}$-wertigen Funktion $f = u + iv : I \to \mathbb{C}$ ist wie üblich komponentenweise definiert, das heißt

$$\int_I f = \int_I u + i \int_I v \in \mathbb{C}.$$

Definition 2.2 (komplexes Kurvenintegral) *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in C^0(\Omega, \mathbb{C})$. Für $\gamma \in PC^1([a,b], \Omega)$ definieren wir*

$$\int_\gamma f\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

Im Integral rechts steht das Produkt der komplexen Zahlen $f(\gamma(t))$ und $\gamma'(t)$. Um das Integral in reelle Kurvenintegrale umzuformen, schreiben wir $f = u + iv$ mit $u, v \in C^0(\Omega)$ sowie $\gamma = x + iy$ mit $x, y \in PC^1(I)$ für $I = [a,b]$, und berechnen

$$\int_I (f\circ\gamma)\gamma' = \int_I \big((u+iv)\circ\gamma\big)\,(x' + iy') = \int_I \big((u\circ\gamma)x' - (v\circ\gamma)y'\big) + i\big((u\circ\gamma)y' + (v\circ\gamma)x'\big),$$

das heißt es gilt

$$\int_\gamma f\,dz = \int_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i\int_\gamma (u\,dy + v\,dx). \tag{2.5}$$

Als Merkregel kann man hier $dz = dx + idy$ benutzen, die rechte Seite der Formel ergibt sich dann durch formales Ausmultiplizieren.

Beispiel 2.1 Sei γ der gegen den Uhrzeigersinn durchlaufene Kreis mit Radius $r > 0$ um den Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, das heißt genauer

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\backslash\{0\},\ \gamma(\theta) = z_0 + re^{i\theta}.$$

Es gilt $\gamma'(\theta) = ire^{i\theta}$. Wir berechnen nun für $k \in \mathbb{Z}$

$$\int_\gamma (z - z_0)^k\,dz = \int_0^{2\pi} (re^{i\theta})^k\,ire^{i\theta}\,d\theta = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}, \\ 2\pi i & \text{falls } k = -1. \end{cases}$$

Satz 2.2 (Cauchys Integralsatz) *Die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, sei stetig partiell differenzierbar und holomorph. Ist dann $\gamma \in PC^1(I, \Omega)$ geschlossen homotop zu einer konstanten Kurve, so folgt*

$$\int_\gamma f\,dz = 0.$$

Beweis: Nach Satz 1.5 in diesem Kapitel müssen wir nur prüfen, ob die Differentialformen $u\,dx - v\,dy$ und $u\,dy + v\,dx$ geschlossen sind, das heißt ob gilt

$$u_y = -v_x \quad \text{und} \quad u_x = v_y.$$

Das sind aber genau die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. □

Etwas allgemeiner besagt Satz 1.5, dass das Kurvenintegral von $f(z)\,dz$, f holomorph, den gleichen Wert ergibt für zwei Kurven, die homotop mit festen Endpunkten oder geschlossen hoomotop sind. Tatsächlich kann auf die Stetigkeit der partiellen Ableitungen verzichtet werden, es reicht als Voraussetzung dass f holomorph ist. Diese Verschärfung ist für uns aber nicht relevant.

Definition 2.3 (komplexe Stammfunktion) *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Dann heißt $F : \Omega \to \mathbb{C}$ (komplexe) Stammfunktion von f auf Ω, falls gilt:*

$$F'(z) = f(z) \quad \text{für alle } z \in \Omega.$$

Im Gegensatz zur Situation bei Funktionen einer reellen Variablen, wo bekanntlich jede stetige Funktion eine Stammfunktion besitzt, müssen für die Existenz einer komplexen Stammfunktion wieder Integrabilitätsbedingungen erfüllt sein.

Folgerung 2.1 (Existenz komplexer Stammfunktionen) *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend. Für $f \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$, $f = u + iv$, sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *f besitzt auf Ω eine komplexe Stammfunktion.*

(b) *f ist komplex differenzierbar auf Ω.*

Beweis: Sei $F = U + iV$ Stammfunktion von f, also $u + iv = U_x - iU_y = V_y + iV_x$ nach (2.4). Es folgt $U, V \in C^2(\Omega)$ und

$$u_x - v_y = V_{yx} - V_{xy} = 0 \quad \text{und} \quad u_y + v_x = U_{xy} - U_{yx} = 0.$$

Gelten umgekehrt die Cauchy-Riemann Gleichungen für f, so sind die 1-Formen $u\,dx - v\,dy$ sowie $u\,dy + v\,dx$ geschlossen, besitzen also Stammfunktionen $U, V : \Omega \to \mathbb{R}$ nach Satz 1.6. Für U, V verifiziert man leicht die Cauchy-Riemann Gleichungen, also ist $F = U + iV$ komplex differenzierbar und mit (2.4) erhalten wir $F' = f$. $\square$

Im folgenden schreiben wir $D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$, und setzen

$$\int_{\partial D_r(z_0)} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz, \qquad \text{für } \gamma : [0, 2\pi] \to \partial D_r(z_0),\ \gamma(t) = z_0 + re^{it}.$$

Bekanntlich hängt das Integral nicht von der Wahl der Parametrisierung von $\partial D_r(z_0)$ ab, solange der Kreis im positiven Sinn (also gegen den Uhrzeigersinn) durchlaufen wird. Der folgende Satz besagt unter anderem, dass eine holomorphe Funktion auf einer Kreisscheibe schon durch ihre Werte auf dem Rand der Kreisscheibe bestimmt ist. Für reell differenzierbare Funktionen ist das keineswegs so, zum Beispiel gibt es (viele) Funktionen $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\eta(x) = 0$ für $|x| \geq 1$.

Satz 2.3 (Cauchy Integralformel) *Sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$ holomorph und $\overline{D_r(z_0)} \subset \Omega$. Dann gilt für alle $z \in D_r(z_0)$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Beweis: In $\Omega \backslash \{z\}$ ist der Kreis $\partial D_r(z_0)$ homotop zu $\partial D_\varepsilon(z)$, jeweils mit der mathematisch positiven Orientierung, falls $0 < \varepsilon < r - |z - z_0|$. Die Konstruktion der Homotopie sei den LeserInnen überlassen. Nun ist die Funktion $\zeta \mapsto f(\zeta)/(\zeta - z)$ auf $\Omega \backslash z$ komplex differenzierbar nach der Quotientenregel, und damit das Kurvenintegral homotopieinvariant nach (der nachfolgenden Bemerkung zu) Satz 2.2 Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\
(\zeta = z + \varepsilon e^{it}) \quad &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}}\, i\varepsilon e^{it}\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{it})\, dt.
\end{aligned}$$

Da f im Punkt z stetig ist, geht die rechte Seite gegen $f(z)$ mit $\varepsilon \to 0$. $\square$

Satz 2.4 (holomorph = analytisch) *Sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$ komplex differenzierbar und $\overline{D_r(z_0)} \subset \Omega$. Dann gilt für alle $z \in D_r(z_0)$ die Potenzreihenentwicklung*

$$f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit } a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\, d\zeta.$$

Insbesondere ist f auf Ω unendlich oft komplex differenzierbar.

Beweis: Aus der Cauchyschen Integralformel, Satz 2.3, erhalten wir durch Entwicklung des Integranden in eine geometrische Reihe für $z \in D_r(z_0)$ die Darstellung

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}} \, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\Big)^k \, d\zeta.$$

Aus der Linearität des Kurvenintegrals folgt mit der Definition der a_k

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\Big)^k \, d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n} (z - z_0)^k \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, d\zeta \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k. \end{aligned}$$

Das komplexe Kurvenintegral ist wie in Lemma 1.3 abgeschätzt durch Länge der Kurve mal Supremum des Integranden. Es folgt mit $M = \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|$ für $|z - z_0| < r$

$$\begin{aligned} \Big| f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k \Big| &= \Big| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{k=n+1}^{\infty} \Big(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\Big)^k \, d\zeta \Big| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r \frac{M}{r} \sum_{k=n+1}^{\infty} \Big(\frac{|z - z_0|}{r}\Big)^k \\ &= \frac{M}{1 - \frac{|z - z_0|}{r}} \Big(\frac{|z - z_0|}{r}\Big)^{n+1} \to 0 \quad \text{mit } n \to \infty. \end{aligned}$$

Damit ist die Potenzreihendarstellung bewiesen.

Sei nun allgemein $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ eine auf $D_r(z_0)$ konvergente Potenzreihe. Die Polynome $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k$ sind komplex differenzierbar, also gilt auf $D_r(z_0)$ nach Satz 2.1

$$Df_n = \begin{pmatrix} c_n & -d_n \\ d_n & c_n \end{pmatrix} \qquad \text{wobei } c_n + i d_n = f_n' = \sum_{k=1}^{n} k a_k (z - z_0)^{k-1}.$$

Die gliedweise differenzierte Potenzreihe $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-1}$ konvergiert aber ebenfalls lokal gleichmäßig auf $D_r(z_0)$, siehe Lemma 3.1 in Kapitel 5. Da partielle Ableitungen eindimensionale Ableitungen sind, können wir die bekannte Vertauschbarkeit von Konvergenz und Ableitung, Satz 3.2 in Kapitel 5, hier anwenden und erhalten mit $n \to \infty$ auf $D_r(z_0)$

$$Df = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & a \end{pmatrix} \qquad \text{wobei } c + id = g.$$

Nach Satz 2.1 ist f also komplex differenzierbar mit $f' = g$. Durch Induktion ergibt sich, dass f auf $D_r(z_0)$ unendlich oft komplex differenzierbar ist. □

Wir sehen jetzt noch deutlicher, dass komplexe Differenzierbarkeit eine viel stärkere Bedingung darstellt als reelle Differenzierbarkeit. Die Existenz von Potenzreihendarstellungen ist sehr einschneidend, zum Beispiel ist eine holomorphe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$, deren Nullstellenmenge einen Häufungspunkt in Ω hat, automatisch die Nullfunktion. Dies folgt jetzt aus dem Identitätssatz für Potenzreihen, siehe Satz 4.11 in Kapitel 2. Für reell differenzierbare Funktionen ist eine solche Aussage keineswegs wahr. Aus Zeitgründen müssen wir den Ausflug in die Funktionentheorie nun leider beenden.