Kapitel 9

Lokale Auflösung von Gleichungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Wir interessieren uns für die Lösbarkeit einer nichtlinearen Gleichung $f(x) = y$ zu gegebener rechter Seite $y \in \mathbb{R}^m$. Genauer wollen wir die lokale Lösbarkeit betrachten, das heißt wir setzen voraus, dass eine Lösung der Gleichung $f(x_0) = y_0$ gegeben ist, und stellen uns die folgenden Fragen:

(1) Hat die Gleichung $f(x) = y$ zu jedem y nahe bei y_0 eine Lösung x nahe bei x_0?

(2) Ist x_0 die einzige Lösung von $f(x) = y_0$ in einer Umgebung von x_0?

(3) Falls nicht, wie sieht die Lösungsmenge $f^{-1}\{y_0\}$ nahe bei x_0 aus?

Betrachten wir zunächst den Fall, dass f affin-linear ist. Wegen $f(x_0) = y_0$ hat f dann die Form $f(x) = y_0 + A(x - x_0)$ mit $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ und es gilt

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad A(x - x_0) = y - y_0.$$

In diesem Fall liefert die Lineare Algebra sogar globale Antworten:

(1) Es gibt eine Lösung für alle $y \in \mathbb{R}^m \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rang} A = m$.

(2) Es gibt höchstens eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad \ker A = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rang} A = n$.

(3) $f^{-1}\{y_0\} = x_0 + \ker A$ ist ein affiner Unterraum der Dimension $n - \operatorname{rang} A$.

Sei nun $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ beliebig, und $R_f(\xi) = f(x_0 + \xi) - \big(f(x_0) + Df(x_0)\xi\big)$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$ hinreichend klein. Ist $f(x_0) = y_0$, so folgt mit $A = Df(x_0)$

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad A(x - x_0) + R_f(x - x_0) = y - y_0.$$

Wir hoffen, dass sich der nichtlineare Term $R_f(x - x_0)$ als Störung der linearen Gleichung behandeln lässt, so dass sich die Aussagen (1), (2) und (3) geeignet übertragen lassen.

1 Diffeomorphismen

Definition 1.1 *Eine Abbildung $f : U \to V$ zwischen offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ heißt Diffeomorphismus der Klasse C^r, wobei $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, falls f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} sind r-mal stetig differenzierbar.*

Beispiel 1.1 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Ist $f \in C^1(I)$ mit $f' > 0$ auf ganz I (bzw. $f' < 0$ auf ganz I), so ist $J := f(I)$ ein offenes Intervall und $f : I \to J$ ein C^1-Diffeomorphismus. Dies ergibt sich aus Folgendem:

- $f : I \to J$ ist bijektiv, da streng monoton wachsend. Nach dem Zwischenwertsatz, genauer Satz 2.2 in Kapitel 3, ist J wieder ein offenes Intervall.
- Die Umkehrabbildung $g = f^{-1}$ ist differenzierbar mit $g' = 1/(f' \circ g)$, insbesondere ist g von der Klasse C^1, vgl. Kapitel 4, Satz 1.6.

Umgekehrt: ist $f : I \to f(I)$ ein C^1-Diffeomorphismus mit Umkehrabbildung $g : f(I) \to I$, so ergibt die Kettenregel

$$g(f(x)) = x \quad \Rightarrow \quad g'(f(x))f'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) \neq 0.$$

Nach dem Zwischenwertsatz gilt entweder $f' > 0$ auf ganz I oder $f' < 0$ auf ganz I. Insbesondere ist f streng monoton.

Zum Beispiel ist die Abbildung $f : (-1,1) \to (-1,1)$, $f(x) = x^3$, zwar bijektiv, genauer streng monoton wachsend, und von der Klasse C^1, aber sie ist kein C^1-Diffeomorphismus, denn es gilt $f'(0) = 0$. Die Umkehrabbildung

$$g : (-1,1) \to (-1,1),\ g(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y} & \text{für } y \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-y} & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

ist im Punkt $y = 0$ nicht differenzierbar.

Beispiel 1.2 Sei $U = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi\}$ und $V = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,0) : x \geq 0\}$. Die Polarkoordinatenabbildung

$$f : U \to V,\ f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta),$$

ist ein Diffeomorphismus der Klasse C^∞. Prüden Sie nach, dass die Umkehrabbildung $g : V \to U$ wie folgt gegeben ist:

$$g(x,y) = \begin{cases} \big(\sqrt{x^2+y^2},\ \arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\big) & \text{für } y \geq 0 \\ \big(\sqrt{x^2+y^2},\ 2\pi - \arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\big) & \text{für } y < 0. \end{cases}$$

Die Funktion arccos ist unendlich oft differenzierbar auf dem Intervall $(-1,1)$, also ist g unendlich oft differenzierbar für $y \in V$, $y \neq 0$. Aber für $x < 0$ gilt alternativ die Formel

$$g(x,y) = \big(\sqrt{x^2+y^2},\ \frac{\pi}{2} + \arccos \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\big).$$

Somit ist in der Tat $g \in C^\infty(V,U)$.

Beispiel 1.3 (Inversion) Die Inversion an der Standardsphäre $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ ist der Diffeomorphismus

$$f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \quad f(x) = \frac{x}{|x|^2}.$$

Die Abbildung $f = f^{-1}$ ist von der Klasse C^∞. Die beschränkte Menge $U = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |x| < 1\}$ wird auf die unbeschränkte Menge $V = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| > 1\}$ abgebildet.

Lemma 1.1 (Ableitung der Umkehrfunktion) *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen und $f : U \to V$ sei bijektiv mit Umkehrabbildung $g : V \to U$. Sind f in x_0 und g in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar, so ist $Df(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ invertierbar, insbesondere $m = n$, und es gilt $Dg(y_0) = Df(x_0)^{-1}$.*

Beweis: Aus $g\big(f(x)\big) = x$ und $f\big(g(y)\big) = y$ folgt mit der Kettenregel

$$Dg(y_0)Df(x_0) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \quad Df(x_0)Dg(y_0) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^m}.$$

Also ist $Df(x_0)$ injektiv und surjektiv, das heißt invertierbar, und die Dimensionsformel impliziert $m = n$. □

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen. Theoretisch hätten wir in unserer Definition 1.1 eines Diffeomorphismus $f : U \to V$ die Möglichkeit $m \neq n$ zulassen können. Lemma 1.1 zeigt, dass dies nichts gebracht hätte, denn es gilt automatisch $n = m$; man spricht von der Invarianz der Dimension unter Diffeomorphismen. Eine Bijektion $f : U \to V$ heißt Homeomorphismus, wenn f und f^{-1} beide stetig sind. Nach einem Satz von Brouwer (1910) gilt die Invarianz der Dimension, also $m = n$, schon für Homeomorphismen. Dies ist auf dem Hintergrund eines Beispiels von Peano (1890) zu sehen, der surjektive, stetige Abbildungen von einem Intervall auf die Fläche eines Quadrats konstruiert hat. Der Satz von Brouwer wird mit dem Konzept des Abbildungsgrads bewiesen, das in der algebraischen Topologie oder der nichtlinearen Funktionalanalysis eingeführt wird.

Bekanntlich heißt $\det Df(x_0)$ Jacobideterminante von f in x_0. In der Situation von Lemma 1.1 folgt aus dem Determinantenmultiplikationssatz

$$\det Dg(y_0) \det Df(x_0) = 1 \quad \text{für } y_0 = f(x_0). \tag{1.1}$$

Lemma 1.2 (Höhere Ableitungen der Umkehrfunktion) *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to V$ bijektiv. Ist $f \in C^r(U, V)$ für ein $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und ist die Umkehrabbildung $g : V \to U$ differenzierbar, so ist auch $g \in C^r(V, U)$.*

Beweis: Nach Lemma 1.1 gilt $Dg = (Df)^{-1} \circ g$. Die Cramersche Regel für die Berechnung der inversen Matrix impliziert

$$\frac{\partial g_j}{\partial y_i} = (-1)^{i+j} \frac{M_{ij}(Df)}{\det(Df)} \circ g. \tag{1.2}$$

Dabei bezeichnet $M_{ij}(Df)$ die Determinante der Matrix, die aus Df durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über $r \in \mathbb{N}$. Da g nach Voraussetzung differenzierbar und somit stetig ist, vgl. Satz 3.2 in Kapitel 6, ist für $f \in C^1$ die rechte Seite in (1.2) stetig als Produkt, Quotient und Verkettung stetiger Funktionen, und damit $g \in C^1$. Ist $f \in C^r$ und induktiv schon $g \in C^{r-1}$, so ist die rechte Seite von der Klasse C^{r-1} als Produkt, Quotient und Verkettung von C^{r-1}-Funktionen, siehe Folgerung 3.1 in Kapitel 6, und damit $g \in C^r$, was zu zeigen war. □

Nach diesen Vorüberlegungen wollen wir nun die Frage der Existenz einer Lösung angehen. Dazu die folgenden Definitionen.

Definition 1.2 *Eine Folge x_k, $k \in \mathbb{N}$, in einem metrischen Raum (X,d) heißt Cauchyfolge, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{R}$ gibt mit*

$$d(x_k, x_l) < \varepsilon \quad \textit{für alle } k, l > N.$$

Ein metrischer Raum heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge x_k in X konvergiert, das heißt es gibt ein $x \in X$ mit $d(x, x_k) \to 0$ mit $k \to \infty$.

Natürlich ist $\mathbb{R}^n$ mit der Euklidischen Abstandsfunktion ein vollständiger metrischer Raum. Aber jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist mit dem euklidischen Abstand auch ein vollständiger metrischer Raum, denn eine Cauchyfolge $x_k \in A$ ist auch Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$ und konvergiert damit gegen ein $x \in \mathbb{R}^n$, und es gilt $x \in A$ wegen A abgeschlossen.

Satz 1.1 (Fixpunktsatz von Banach) *Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum, und $F : X \to X$ eine Kontraktion, das heißt es gibt ein $\theta \in [0,1)$ mit*

$$d(F(x), F(y)) \le \theta\, d(x,y) \quad \textit{für alle } x, y \in X. \tag{1.3}$$

Dann gibt es genau ein $x \in X$ mit $F(x) = x$.

Beweis: Die Eindeutigkeit ist klar, denn aus $F(x) = x$ und $F(y) = y$ folgt

$$d(x,y) = d(F(x), F(y)) \le \theta\, d(x,y) \quad \Rightarrow \quad d(x,y) = 0, \text{ also } x = y.$$

Um den Fixpunkt zu konstruieren, betrachten wir die rekursiv definierte Folge $x_{n+1} = F(x_n)$ mit beliebigem Startwert $x_0 \in X$. Es folgt aus (1.3) für $n \ge 1$

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(F(x_n), F(x_{n-1})) \le \theta\, d(x_n, x_{n-1}). \tag{1.4}$$

Wir können uns einen müder werdenden Frosch vorstellen, dessen Sprünge jedes Mal um ein Faktor $\theta \in [0,1)$ kürzer werden. Wie weit kann der Frosch insgesamt kommen? Es folgt per Induktion aus (1.4)

$$d(x_{n+1}, x_n) \le \theta^n\, d(x_1, x_0) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.5}$$

und hieraus weiter mit der Dreiecksungleichung

$$d(x_n, x_0) \le \sum_{j=0}^{n-1} d(x_{j+1}, x_j) \le \sum_{j=0}^{n-1} \theta^j\, d(x_1, x_0) \le \frac{1}{1-\theta}\, d(x_1, x_0).$$

Indem wir x_n statt x_0 als Startwert auffassen, haben wir für $m > n$

$$d(x_m, x_n) \le \frac{1}{1-\theta}\, d(x_{n+1}, x_n) \le \frac{\theta^n}{1-\theta}\, d(x_1, x_0). \tag{1.6}$$

Also ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Cauchyfolge, und konvergiert nach Voraussetzung gegen ein $x \in X$. Da F nach Voraussetzung Lipschitzstetig ist (mit Konstante θ), folgt

$$F(x) = \lim_{n \to \infty} F(x_n) = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = x,$$

und die Existenz des Fixpunkts ist gezeigt. $\square$

Wir bemerken, dass wir a priori abschätzen können, wie weit die Iteration im n-ten Schritt noch vom gesuchten Fixpunkt entfernt ist, und zwar folgt mit $m \to \infty$ aus (1.6)

$$d(x, x_n) \le \frac{\theta^n}{1-\theta}\, d(x_1, x_0).$$

Satz 1.2 (über inverse Funktionen) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Ist $Df(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ invertierbar, so gibt es eine offene Umgebung U von x_0, so dass gilt:*

(a) *$V = f(U)$ ist offene Umgebung von $y_0 = f(x_0)$*

(b) *$f : U \to V$ ist Diffeomorphismus der Klasse C^1.*

Zusatz. Ist $f \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^n)$ für ein $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so ist $g = (f|_U)^{-1} \in C^r(V, \mathbb{R}^n)$.

Beweis: Wir können $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$ annehmen, andernfalls betrachten wir die Abbildung

$$\tilde{f} : \tilde{\Omega} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : x_0 + \xi \in \Omega\} \to \mathbb{R}^n,\ \tilde{f}(\xi) = f(x_0 + \xi) - f(x_0).$$

Schritt 1 *Formulierung als Fixpunktproblem*
Mit $A := Df(0)$ und $R_f(x) := f(x) - Ax$ können wir die Gleichung wie folgt umformen:

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad Ax + R_f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = A^{-1}\big(y - R_f(x)\big).$$

Für $y \in \mathbb{R}^n$ definieren wir also $\phi_y : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\phi_y(x) = A^{-1}\big(y - R_f(x)\big)$, und erhalten

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \phi_y(x) = x. \tag{1.7}$$

Schritt 2 *Konstruktion der Lösung*
Wir bestimmen $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$, so dass für jedes $y \in B_\varepsilon(0)$ die Abbildung $\phi_y : \overline{B_\delta(0)} \to \overline{B_\delta(0)}$ eine Kontraktion ist. Setze $\Lambda = \|A^{-1}\| \in (0, \infty)$. Nach Voraussetzung ist $DR_f(x) = Df(x) - A$ stetig mit $DR_f(0) = 0$, folglich gibt es ein $\delta_0 > 0$ mit

$$\overline{B_{\delta_0}(0)} \subset \Omega \quad \text{und} \quad \|DR_f(x)\| \leq \frac{1}{2\Lambda} \quad \text{für } |x| \leq \delta_0.$$

Aus dem Schrankensatz, siehe Satz 1.2 in Kapitel 7, folgt

$$|x_1|, |x_2| \leq \delta_0 \quad \Rightarrow \quad |R_f(x_1) - R_f(x_2)| \leq \frac{1}{2\Lambda}\,|x_1 - x_2|. \tag{1.8}$$

Wir berechnen nun

$$\begin{aligned} |\phi_y(x_1) - \phi_y(x_2)| &= \big|A^{-1}\big(y - R_f(x_1)\big) - A^{-1}\big(y - R_f(x_2)\big)\big| \\ &= \big|A^{-1}\big(R_f(x_1) - R_f(x_2)\big)\big| \\ &\leq \Lambda\,|R_f(x_1) - R_f(x_2)|. \end{aligned}$$

Also folgt aus (1.8) die Kontraktionseigenschaft

$$|x_1|, |x_2| \leq \delta_0 \quad \Rightarrow \quad |\phi_y(x_1) - \phi_y(x_2)| \leq \frac{1}{2}\,|x_1 - x_2|. \tag{1.9}$$

Bisher ist $y \in \mathbb{R}^n$ noch beliebig. Wir schätzen weiter ab

$$\begin{aligned} |\phi_y(x)| &= \big|A^{-1}\big(y - R_f(x)\big)\big| \\ &\leq \|A^{-1}\|\,\big(|y| + |R_f(x)|\big) \\ &= \Lambda\big(|y| + |R_f(x) - R_f(0)|\big) \quad \big(\text{ da } R_f(0) = 0\big) \\ &\leq \Lambda|y| + \frac{1}{2}|x| \quad \text{für } |x| \leq \delta_0 \text{ nach (1.8).} \end{aligned}$$

Also folgt für $\delta \in (0, \delta_0]$, wenn wir $\varepsilon = \delta/(2\Lambda) > 0$ wählen,

$$|x| \leq \delta,\ |y| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |\phi_y(x)| < \Lambda\varepsilon + \frac{1}{2}\delta = \delta. \tag{1.10}$$

Wegen (1.10) und (1.9) ist $\phi_y : \overline{B_\delta(0)} \to \overline{B_\delta(0)}$ eine wohldefinierte Kontraktion mit Konstante $\theta = 1/2$. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es zu jedem $y \in B_\varepsilon(0)$ genau ein $x \in \overline{B_\delta(0)}$ mit $\phi_y(x) = x$, das heißt $f(x) = y$ nach (1.7). Tatsächlich ist $x \in B_\delta(0)$, denn nach (1.10) gilt $|x| = |\phi_y(x)| < \delta$. Die Mengen $V = B_\varepsilon(0)$ und $U = f^{-1}(V) \cap B_\delta(0)$ sind offene Umgebungen des Nullpunkts, siehe Satz 1.4 in Kapitel 6 für die Offenheit von U, und wie gezeigt ist $f : U \to V$ bijektiv. Insbesondere ist Behauptung (a) bewiesen.

Schritt 3 *Differenzierbarkeit der inversen Abbildung*
Sei $g : V \to U$ die Umkehrabbildung von $f : U \to V$. Dann gilt

$$|g(y)| = |\phi_y(g(y))| \leq \Lambda|y| + \frac{1}{2}|g(y)| \quad \Rightarrow \quad |g(y)| \leq 2\Lambda|y|. \tag{1.11}$$

Insbesondere ist g stetig im Nullpunkt mit $g(0) = 0$. Wir zeigen nun $Dg(0) = A^{-1}$. Für $y \neq 0$ ist $g(y) \neq 0$ und es gilt die Abschätzung

$$\frac{|g(y) - A^{-1}y|}{|y|} = \frac{|\phi_y\big(g(y)\big) - A^{-1}y|}{|y|} = \frac{\big|A^{-1}\big(R_f\big(g(y)\big)\big)\big|}{|y|} \leq \Lambda \frac{\big|R_f\big(g(y)\big)\big|}{|g(y)|}\frac{|g(y)|}{|y|}.$$

Mit $y \to 0$ geht die rechte Seite aber gegen Null, denn $|g(y)|/|y| \leq 2\Lambda$ nach (1.11) und $|R_f(x)|/|x| \to 0$ mit $x = g(y) \to 0$. Damit ist ist $Dg(0) = A^{-1}$ gezeigt. Um die Differenzierbarkeit für alle $y \in V$ zu bekommen, wählen wir $\delta > 0$ so klein, dass $\det Df(x) \neq 0$ für alle $x \in B_\delta(0)$. Ist dann $y \in V$, so sind die Voraussetzungen des Satzes im Punkt $x = g(y)$ erfüllt, und es folgt aus dem Bewiesenen $Dg(y) = Df(x)^{-1}$.

Lemma 1.2 liefert schließlich $g \in C^1(V, U)$. Ist $f \in C^r(U, V)$ für ein $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so ist $g \in C^r(V, U)$, ebenfalls nach Lemma 1.2. □

Als unmittelbare Konsequenz des Satzes halten wir fest:

Folgerung 1.1 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Ist $Df(x)$ invertierbar für alle $x \in \Omega$, so ist $f(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ offen.*

Beweis: Nach Satz 1.2 hat jeder Punkt $y \in f(\Omega)$ eine offene Umgebung $V \subset f(\Omega)$. □

Beispiel 1.4 Wie wir in Beispiel 1.1 gesehen haben, bildet eine eindimensionale Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit $f' \neq 0$ das gesamte Definitionsintervall diffeomorph auf das Bildintervall ab, das heißt es gilt eine globale Version des Umkehrsatzes. Das folgende Beispiel zeigt, dass eine entsprechende Aussage für Funktionen mehrerer Variabler im allgemeinen nicht wahr ist. In reellen Koordinaten $z = x + iy$ lautet die komplexe Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \exp(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

Es gilt $\exp(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$. Die Jacobideterminante von exp ist nirgends Null, genauer gilt

$$D\exp(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det D\exp(x, y) = e^{2x} \neq 0.$$

Die Abbildung ist jedoch nicht injektiv, denn es ist $\exp(x, y + 2k\pi) = \exp(x, y)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Wir diskutieren jetzt ein Beispiel, das unter anderem beim Übergang von der Lagrangefunktion zur Hamiltonfunktion in der klassischen Mechanik auftritt. Für eine differenzierbare Funktion $L : U \to \mathbb{R}$ definiert man die zugehörige Gradientenabbildung durch

$$f : U \to V,\ f(x) = DL(x) \quad \text{wobei } V = f(U) \subset \mathbb{R}^n.$$

Ist $f : U \to V$ injektiv und $g : V \to U$ die Umkehrfunktion von f, so können wir die Legendretransformierte oder duale Funktion von L wie folgt erklären:

$$H : V \to \mathbb{R},\ H(y) = \Big(\sum_{i=1}^n y_i x_i - L(x)\Big)\big|_{x=g(y)}.$$

Für $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $L(x) = \sqrt{1+|x|^2}$ berechnet man zum Beispiel $V = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < 1\}$ und

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+|x|^2}} \quad g(y) = \frac{y}{\sqrt{1-|y|^2}} \quad \text{sowie}$$

$$H(y) = \Big(\sum_{i=1}^n y_i x_i - \sqrt{1+|x|^2}\Big)\big|_{x=g(y)} = \sqrt{1-|y|^2}.$$

Satz 1.3 (Involutionseigenschaft der Legendretransformation) *Sei für $L \in C^2(U)$ die Gradientenabbildung $f : U \to V$, $f(x) = DL(x)$, diffeomorph, und sei H die Legendretransformierte von L. Dann folgt $DH = g$ mit $g = f^{-1} \in C^1(V,U)$, insbesondere $H \in C^2(V)$, und die Legendretransformierte von H ist wieder L:*

$$L(x) = \Big(\sum_{i=1}^n y_i x_i - H(y)\Big)\big|_{y=f(x)} \quad \textit{für alle } x \in U.$$

Beweis: Wir berechnen unter Verwendung von $\dfrac{\partial L}{\partial x_i}(g(y)) = f_i(g(y)) = y_i$

$$\frac{\partial H}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_j}\Big(\sum_{i=1}^n y_i g_i(y) - L \circ g\Big) = g_j + \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial g_i}{\partial y_j} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_i} \circ g\, \frac{\partial g_i}{\partial y_j} = g_j,$$

also gilt $DH = g$. Die Darstellung von L folgt mit $y = f(x)$ in der Definition von H. $\square$

Geometrisch gelangen wir zu der Legendretransformation, wenn wir für den Graph einer Funktion L die Schar $\{E_x : x \in U\}$ der affinen Tangentialebenen betrachten:

$$E_x = \{(\xi, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : z = L(x) + DL(x)(\xi - x)\} \quad \text{für } x \in U.$$

Wir wollen diese Schar durch die Steigungen $y = DL(x)$ parametrisieren; natürlich muss dazu die Gradientenabbildung injektiv sein. Die Legendretransformierte $H : V \to \mathbb{R}$ von L ist dann definiert, und es folgt

$$E_x = \{(\xi, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : z = \sum_{i=1}^n y_i \xi_i - H(y)\} \quad \text{für } y = DL(x).$$

Umgekehrt kann das Problem betrachtet werden, zu einer gegebenen Ebenenschar $E_y = \{(\xi, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : z = \sum_{i=1}^n y_i \xi_i - H(y)\}$ einen Graphen $L : U \to \mathbb{R}$ zu bestimmen, dessen affine Tangentialebenen gerade die E_y sind. Es muss dann H die Legendretransformierte der gesuchten Funktion L sein, und unter den Annahmen von Satz 1.3 kann L wiederum durch Legendretransformation von H bestimmt werden.

Satz 1.4 (Youngsche Ungleichung) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $L \in C^2(U)$ mit $D^2L(x) > 0$ für alle $x \in U$. Dann ist die Legendretransformierte $H \in C^2(V)$ definiert, wobei $V = DL(U)$, und es gilt*

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq L(x) + H(y) \quad \text{für alle } x \in U,\, y \in V.$$

Gleichheit tritt ein genau für $y = DL(x)$ beziehungsweise äquivalent $x = DH(y)$.

Beweis: Die Gradientenabbildung $f \in C^1(U,V)$, $f(x) = DL(x)$, ist injektiv, denn wegen $Df(x) = D^2L(x) > 0$ folgt für $x_0, x_1 \in U$ mit $x_0 \neq x_1$

$$\langle f(x_1) - f(x_0), x_1 - x_0 \rangle = \int_0^1 \langle Df((1-t)x_1 + tx_0)(x_1 - x_0), x_1 - x_0 \rangle \, dt > 0.$$

Da außerdem $Df(x)$ invertierbar ist für alle $x \in U$, ist f ein C^1-Diffeomorphismus nach dem Umkehrsatz. Betrachte nun für festes $y \in V$ die Funktion $\varphi \in C^2(U)$ mit

$$\varphi(x) = L(x) + H(y) - \sum_{i=1}^n y_i x_i.$$

Dann gilt $\varphi(g(y)) = 0$ nach Definition von H sowie $D\varphi(g(y)) = DL(g(y)) - y = 0$ nach Definition von $g = f^{-1}$, und $D^2\varphi(x) = D^2L(x) > 0$ für alle $x \in U$. Damit folgt die Behauptung aus Satz 2.4 in Kapitel 7. □

Aus dem Satz folgt für die Legendretransformierte die Darstellung

$$H(y) = \inf_{x \in U} \Big(\sum_{i=1}^n y_i x_i - L(x) \Big).$$

Mit dieser Formel kann die Legendretransformierte auch dann definiert werden, wenn L nicht differenzierbar, sondern lediglich konvex ist.

2 Implizite Funktionen

Wir betrachten jetzt den Fall eines unterbestimmten Systems, wenn es also weniger Gleichungen gibt als Unbekannte. Wir können die Funktion dann wie folgt schreiben, indem wir die Variablen in zwei Gruppen einteilen:

$$f : \Omega \to \mathbb{R}^k, \quad f = f(x,y), \quad \text{wobei } (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n.$$

Gegeben sei eine Lösung (x_0, y_0) der Gleichung $f(x,y) = z_0$. Wir interessieren uns dafür, wie die Lösungsmenge dieser Gleichung nahe bei (x_0, y_0) aussieht. Können wir nach y auflösen, d. h. die Lösungsmenge als Graph einer Funktion $y = g(x)$ darstellen?

Beispiel 2.1 Betrachte die Gleichung

$$f(x,y) = x^2 + y^2 = 1 \quad \text{für } (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

Sei eine Lösung $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ gegeben, also ein Punkt auf dem Einheitskreis. Ist $y_0 > 0$, so ist die Lösungsmenge nahe bei (x_0, y_0) Graph der Funktion $y = \sqrt{1 - x^2}$. Analog haben wir im Fall $y_0 < 0$ die lokale Graphendarstellung $y = -\sqrt{1-x^2}$. Dagegen ist die Lösungsmenge in keiner Umgebung von $(1,0)$ (und ebenso in keiner Umgebung von $(-1,0)$) als Graph über der x-Achse darstellbar, denn es gibt die zwei Lösungen $y = \pm\sqrt{1-x^2}$.

Es kann auch vorkommen, dass (x_0, y_0) der einzige Punkt mit $f(x_0, y_0) = z_0$ ist, z.B. löst nur der Nullpunkt die Gleichung $x^2 + y^2 = 0$ in $\mathbb{R}^2$.

Beispiel 2.2 *Sei $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ linear. Wir unterteilen die $k \times (m+k)$-Matrix von f in eine $k \times m$-Matrix A und eine $k \times k$-Matrix B, d. h.*

$$f(x, y) = Ax + By \quad \textit{mit } A \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k), \quad B \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k).$$

Die Gleichung $Ax+By = z_0$ hat zu festem $x \in \mathbb{R}^m$ eine eindeutige Auflösung nach y dann und nur dann, wenn B invertierbar ist. Ist das der Fall, so lautet die Auflösung $y = B^{-1}(z_0 - Ax)$.

Allgemein schreiben wir die Jacobimatrix von $f = f(x, y)$ in der Form

$$Df(x, y) = (D_x f,\, D_y f) \in (\mathbb{R}^{k\times m},\, \mathbb{R}^{k\times k}).$$

Wenn wir nach $y = g(x)$ auflösen wollen, so sollte nach Beispiel 2.2 die Ableitung $D_y f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{k\times k}$ invertierbar sein. In den Anwendungen ist die Einteilung in die beiden Variablengruppen nicht immer vorgegeben, das heißt es könnte nach verschiedenen Gruppen von je k Variablen aufgelöst werden. So kann der Einheitskreis in einer Umgebung von $(1, 0)$ zwar nicht als Graph $y = g(x)$ geschrieben werden, wohl aber als Graph $x = g(y)$, und außer in den vier Punkten $\pm e_1, \pm e_2$ könnte sowohl nach x als auch nach y aufgelöst werden.

Merkregel. Die Ableitung nach den Variablen, nach denen aufgelöst werden soll, muss invertierbar sein. Im Spezialfall $k = 1$ bedeutet das $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Satz 2.1 (über implizite Funktionen) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$. Ist $f(x_0, y_0) = z_0$ und $D_y f(x_0, y_0) \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ invertierbar, so gibt es offene Umgebungen U von x_0 bzw. V von y_0 sowie eine Funktion $g \in C^1(U, V)$ mit*

$$\{(x, y) \in U \times V : f(x, y) = z_0\} = \{\big(x, g(x)\big) : x \in U\}, \tag{2.12}$$

insbesondere ist $g(x_0) = y_0$. Die Funktion g hat die Ableitung

$$Dg(x_0) = -\big(D_y f(x_0, y_0)\big)^{-1} D_x f(x_0, y_0). \tag{2.13}$$

Zusatz. Für jedes $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ gilt die Implikation

$$f \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^k) \quad \Rightarrow \quad g \in C^r(U, \mathbb{R}^k).$$

Beweis: Wir verwenden einen Trick, um den Satz über inverse Funktionen anwenden zu können, und zwar betrachten wir $F : \Omega \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$, $F(x, y) = \big(x, f(x, y)\big)$. Es gilt

$$DF = \begin{pmatrix} \mathrm{E}_m & 0 \\ D_x f & D_y f \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{m\times m} & \mathbb{R}^{m\times k} \\ \mathbb{R}^{k\times m} & \mathbb{R}^{k\times k} \end{pmatrix}.$$

Es folgt $\det DF(x_0, y_0) = \det D_y f(x_0, y_0) \neq 0$ nach Voraussetzung. Nach dem Umkehrsatz existieren offene Umgebungen $U_0 \times V$ von (x_0, y_0) sowie W von (x_0, z_0), so dass $F : U_0 \times V \to W$ diffeomorph ist. Wir bezeichnen die zugehörige Umkehrabbildung mit $G \in C^1(W, U_0 \times V)$. Ist $(x, z) \in W$, also $(x, z) = (x, f(x, y))$ mit $(x, y) \in U_0 \times V$ nach Konstruktion, so folgt

$$G(x, z) = G(x, f(x, y) = G(F(x, y)) = (x, y).$$

Also ist G von der Form $G(x,z) = (x, g_0(x,z))$ mit $g_0 \in C^1(W, \mathbb{R}^k)$. Sei nun $U = \{x \in U_0 : (x, z_0) \in W\}$. Da W offen in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$, ist U offen in $\mathbb{R}^m$ und für $(x,y) \in U \times V$ gilt

$$\begin{aligned} f(x,y) = z_0 \quad \Leftrightarrow \quad F(x,y) &= (x, z_0) \\ \Leftrightarrow \quad (x,y) &= G(x, z_0) \quad (\text{da } (x,z_0) \in W) \\ \Leftrightarrow \quad y &= g_0(x, z_0). \end{aligned}$$

Also gilt die Aussage des Satzes mit $g(x) = g(x, z_0)$. Die Formel für die Ableitung folgt aus der Kettenregel:

$$f\big(x, g(x)\big) = z_0 \quad \Rightarrow \quad D_x f(x_0, y_0) + D_y f(x_0, y_0)\, Dg(x_0) = 0.$$

$\square$

Beispiel 2.3 Wir wollen als triviales Beispiel untersuchen, wie die Nullstelle eines quadratischen Polynoms von seinen Koeffizienten abhängt. Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(p,q,\lambda) = \lambda^2 + 2p\,\lambda + q = (\lambda + p)^2 - (p^2 - q).$$

Die Menge $N = \{(p,q,\lambda) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : f(p,q,\lambda) = 0\}$ ist die Vereinigung der beiden disjunkten Graphen $G^{\pm} = \{(p,q,\lambda^{\pm}(p,q)) : p^2 > q\}$, wobei $\lambda^{\pm}(p,q) = -p \pm \sqrt{p^2 - q}$, mit der Menge $\overline{G}^+ \cap \overline{G}^- = \{(p,q,\lambda) : p^2 = q,\ \lambda = -p\}$. Im Fall

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(p_0, q_0, \lambda_0) = 2(\lambda_0 + p_0) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_0^2 - q_0 > 0$$

liegt (p_0, q_0, λ_0) in einem der beiden Graphen G^+ oder G^-, und N ist in einer Umgebung $U \times V$ als Graph von λ^+ oder λ^- darstellbar. Ist dagegen

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(p_0, q_0, \lambda_0) = 2(\lambda_0 + p_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_0^2 - q_0 = 0,$$

so macht der implizite Funktionensatz keine Aussage. Tatsächlich lässt sich die Menge N in keiner Umgebung von (p_0, q_0, λ_0) als Graph $\lambda = \lambda(p,q)$ darstellen: für $p^2 < q$ hat die Gleichung überhaupt keine Lösung, für $p^2 = q$ genau eine und für $p^2 > q$ die zwei verschiedenen Lösungen $\lambda^{\pm}(p,q)$.

Beispiel 2.4 Betrachte jetzt $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(b,\lambda) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + b_0$. Sei λ_0 eine einfache Nullstelle von $f(a,\lambda)$ für $a \in \mathbb{R}^n$ fest, das heißt es gilt

$$f(a,\lambda) = (\lambda - \lambda_0)\, q(\lambda) \quad \text{für ein Polynom } q(\lambda) \text{ mit } q(\lambda_0) \neq 0.$$

Es folgt $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(a, \lambda_0) = q(\lambda_0) \neq 0$. Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert eine Umgebung $U \times V$ von (a, λ_0), so dass zu jedem $b \in U$ genau eine Nullstelle $\lambda(b) \in V$ von $f(b, \cdot\,)$ existiert. Diese hängt unendlich oft differenzierbar von b ab, und es gilt für $0 \leq i \leq n-1$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial b_i}(a) = -\Big(\frac{\partial f}{\partial \lambda}(a, \lambda_0)\Big)^{-1} \frac{\partial f}{\partial b_i}(a, \lambda_0) = -\frac{\lambda_0^i}{n\,\lambda_0^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1}\,\lambda_0^{n-2} + \ldots + a_1}.$$

Wir kommen nun zu einer geometrischen Anwendung des Satzes über implizite Funktionen. Ist $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ und $z_0 \in \mathbb{R}$, so kann im allgemeinen die Niveaumenge

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = z_0\}$$

Punkte enthalten, in denen M nicht lokal wie eine Linie aussieht, z.B. Kreuzungspunkte von Linien oder isolierte Punkte. Ist aber $Df(x, y) \neq 0$ für alle $(x, y) \in M$, so ist M nach dem impliziten Funktionensatz in der Nähe jedes Punkts als C^1-Graph über der x-Achse oder der y-Achse darstellbar und damit wirklich eine Höhenlinie im strengen Sinn des Worts. Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, die lokal aussehen wie ein Unterraum, heißen Untermannigfaltigkeiten; vergleiche hierzu auch die Diskussion des Tangentialraums von differenzierbaren Graphen mittels Blowup, siehe Kapitel 6 Abschnitt 3.

Definition 2.1 *Sei $1 \leq m \leq n$. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heisst m-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Klasse C^r, wobei $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, falls gilt: zu jedem $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und einen C^r-Diffeomorphismus $\phi : \Omega \to \phi(\Omega)$ mit*

$$\phi(M \cap \Omega) = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap \phi(\Omega).$$

Wir nennen den Diffeomorphismus ϕ eine (lokale) Plättung von M. Im Einzelfall kann der Nachweis, dass eine gegebene Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit ist, anhand der Definition mühevoll sein. Für Mengen, die als Niveaumengen einer Funktion gegeben sind, liefert jedoch der Satz über implizite Funktionen folgendes Kriterium.

Satz 2.2 (Untermannigfaltigkeitskriterien) *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und $m + k = n$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *M ist eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^r.*

(2) Niveaumengenkriterium: *Zu $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^k)$, so dass $M \cap \Omega = f^{-1}(0)$ und* $\operatorname{rang} Df = k$ *auf* Ω.

(3) Graphenkriterium: *Zu $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \times V \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ und $g \in C^r(U, V)$, so dass nach geeigneter Permutation der Koordinaten gilt:*

$$M \cap (U \times V) = \{(x, g(x)) : x \in U\}.$$

Beweis: Wir zeigen (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1). Es gelte (1), das heißt zu jedem $p \in M$ gibt es eine lokale Plättung $\phi : \Omega \to \phi(\Omega)$ der Klasse C^r mit $p \in \Omega$. Sei $\pi^\perp : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ die Projektion auf den zweiten Faktor. Dann folgt mit $f = \pi^\perp \circ \phi$ für $q \in \Omega$

$$f(q) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi(q) \in \mathbb{R}^m \times \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad q \in \phi^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\}) = M \cap \Omega.$$

Außerdem gilt $\operatorname{rang} Df = \operatorname{rang}\big(\pi^\perp \circ D\phi\big) = k$ und $f \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^k)$.

Ist (2) erfüllt, so ist nach evtl. Permutation der Koordinaten $D_y f(p)$ invertierbar, wobei $(x, y) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$, und (3) folgt aus dem Satz über implizite Funktionen.

Für (3) $\Rightarrow$ (1) können wir annehmen, dass die Graphendarstellung ohne Permuation der Koordinaten gilt. Wir setzen $\Omega = U \times V$ und

$$\phi : \Omega \to \phi(\Omega),\ \phi(x, y) = \big(x, y - g(x)\big).$$

Dann ist $\phi \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^n)$ injektiv und es gilt

$$D\phi(x,y) = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -Dg(x) & E_k \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det D\phi(x,y) = 1 \quad \text{für alle } (x,y) \in \Omega.$$

Also ist $\phi : \Omega \to \phi(\Omega)$ ein Diffeomorphismus der Klasse C^r nach dem Umkehrsatz. Da $(x,y) \in M \cap \Omega$ genau wenn $y = g(x)$, also $\phi(x,y) \in \mathbb{R}^k \times \{0\}$, ist die in (1) verlangte lokale Plättung gefunden. □

Beispiel 2.5 Die Sphäre $\mathbb{S}^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : |x| = 1\}$ ist eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^{m+1}$ der Klasse C^∞. Denn es gilt

$$\mathbb{S}^m = f^{-1}(0) \;\text{ für }\; f : \mathbb{R}^{m+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\; f(x) = |x|^2 - 1,$$

und $Df(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^{m+1}\backslash\{0\}$. Die Behauptung folgt also aus Satz 2.2.

Definition 2.2 *Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heisst Tangentialvektor von $M \subset \mathbb{R}^n$ m Punkt $p \in M$, falls es eine Abbildung $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ gibt mit $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. Die Menge der Tangentialvektoren von M im Punkt p wird mit T_pM bezeichnet.*

Folgerung 2.1 *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit, und $n = m+k$. Ist $p \in M \cap \Omega = f^{-1}(0)$ für eine Funktion $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ mit $\operatorname{rang} Df = k$ auf Ω, so gilt*

$$T_pM = \ker Df(p).$$

Insbesondere ist T_pM ein m-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

Beweis: Für $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = w$ gilt

$$0 = \frac{d}{dt} f\big(\gamma(t)\big)|_{t=0} = Df\big(\gamma(0)\big)\gamma'(0) = Df(p)\, w \quad \Rightarrow \quad T_pM \subset \ker Df(p).$$

Nach Satz 2.2 gibt es andererseits, nach eventueller Permutation der Koordinaten, offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^k$ mit $p \in U \times V$, sowie $g \in C^1(U, V)$ mit

$$M \cap (U \times V) = \{(x, g(x)) : x \in U\}.$$

Die Graphenabbildung $G \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, $G(x) = (x, g(x))$, bildet nach M ab. Schreiben wir $p = (x_0, g(x_0))$ für geeignetes $x_0 \in U$, so folgt für alle $v \in \mathbb{R}^m$

$$DG(x_0)v = \frac{d}{dt} G(x_0 + tv)|_{t=0} \in T_pM \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Bild} DG(x_0) \subset T_pM.$$

Zusammenfassend ist $\operatorname{Bild} DG(x_0) \subset T_pM \subset \ker Df(p)$. Aber $DG(x_0)$ ist injektiv, denn $DG(x_0)v = (v, Dg(x_0)v)$, und wegen $\operatorname{rang} Df(p) = k$ folgt mit der Dimensionsformel

$$\dim \operatorname{Bild} DG(x_0) = m = n - \operatorname{rang} Df(p) = \dim \ker Df(p).$$

Also gilt $\operatorname{Bild} DG(x_0) = \ker Df(p) = T_pM$. □

Die Folgerung zeigt, dass der Tangentialraum einer m-dimensionalen Untermannigfaltigkeit tatsächlich ein m-dimensionaler Vektorraum ist. Dies zeigt, dass die Dimension einer C^1-Untermannigfaltigkeit wohldefiniert ist, das heißt es kann nicht Plättungen mit verschiedenen Dimensionen von M geben. Auf die Idee wäre vermutlich auch kaum jemand gekommen. Wir kommen nun zur sogenannten Lagrange-Multiplikatorenregel.

Folgerung 2.2 (Extrema mit Nebenbedingungen) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ und $\varphi \in C^1(\Omega)$. Gilt dann für ein $p \in f^{-1}(0)$*

(1) *$\varphi(q) \geq \varphi(p)$ für alle $q \in \Omega$ mit $f(q) = 0$,*

(2) *$\operatorname{rang} Df(p) = k$,*

so gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} \varphi(p) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \operatorname{grad} f_i(p)$.

Beweis: Nach eventueller Verkleinerung von Ω ist $\operatorname{rang} Df = k$ auf Ω und $M := f^{-1}(0)$ ist eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit, wobei $m = n - k$. Ist $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$, so hat hat $\varphi \circ \gamma$ in $t = 0$ ein lokales Minimum und folglich

$$0 = \frac{d}{dt} \varphi\big(\gamma(t)\big)|_{t=0} = \langle \operatorname{grad} \varphi(p), v \rangle,$$

das heißt $\operatorname{grad} \varphi(p) \in (T_pM)^\perp$. Da $f_j|_M \equiv 0$, gilt analog $\operatorname{grad} f_j(p) \in (T_pM)^\perp$ für $1 \leq j \leq k$. Aber $\dim (T_pM)^\perp = k$ nach Folgerung 2.1, und die Vektoren $\operatorname{grad} f_j(p)$ sind die Zeilenvektoren der Matrix $Df(p)$ mit Rang k. Wegen der Gleichheit von Zeilenrang und Spaltenrang ist $\{\operatorname{grad} f_j(p) : 1 \leq j \leq k\}$ eine Basis von $(T_pM)^\perp$, und die Behauptung folgt. $\square$

Beispiel 2.6 Für eine symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ betrachten wir hier nochmals das Problem, die quadratische Form $\varphi(x) = \langle Bx, x \rangle$ zu minimieren unter der Nebenbedingung $f(x) = |x|^2 - 1 = 0$. Da $\mathbb{S}^{n-1} = f^{-1}(0)$ kompakt und φ stetig, wird das Infimum in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ angenommen. Nach Folgerung 2.2 gibt es dann ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} \varphi(x_0) = \lambda \operatorname{grad} f(x_0)$, also $Bx_0 = \lambda x_0$. Somit hat jede symmetrische Matrix B mindestens einen Eigenvektor, vergleiche Kapitel 7, Satz 2.3.

Wir haben die Sätze über inverse und implizite Funktionen im Endlichdimensionalen formuliert, damit das Wesentliche nicht durch zuviel Abstraktion verdeckt wird. An der Verallgemeinerung auf Abbildungen zwischen Banachräumen besteht aber großes Interesse: in den Anwendungen ist die Gleichung $f(x) = y$ zum Beispiel eine Differential- oder Integralgleichung, die durch eine gesuchte Funktion x in einem geeigneten Funktionenraum X gelöst werden soll. Eine Inspektion des Beweises des Umkehrsatzes ergibt, dass die Konstruktion der inversen Abbildung einschließlich ihrer Differenzierbarkeit ohne wesentliche Änderungen auch dann richtig ist, wenn f eine offene Teilmenge des Banachraums X in den Banachraum Y abbildet. Dabei muss die euklidische Norm von A durch die Operatornorm $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$ ersetzt werden, und der Raum $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ muss ersetzt werden durch

$$L(X, Y) = \{A : X \to Y |\, A \text{ linear }, \|A\| < \infty\}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Bedingung $\|A\| < \infty$ äquivalent dazu ist, dass die lineare Abbildung A stetig ist. Dies ist eine *conditio sine qua non*, darum nehmen wir sie in die Definition von $L(X, Y)$ auf. Insbesondere wird in der Definition der Differenzierbarkeit verlangt, dass $Df(x_0) \in L(X, Y)$.

Expliziten Gebrauch von den Koordinaten des $\mathbb{R}^n$ haben wir nur gemacht, um die höhere Differenzierbarkeit der Inversen g zu etablieren. Im Unendlichdimenensionalen wird dazu alternativ die sogenannte Neumannsche Reihe benutzt.